

Ден 1

Задача 1. На възженце има 42 скакалеца. Всяка секунда 7 от тези скакалци решават да прескочат свой съсед, и само него, като той стои неподвижен в това време (един скакалец не може да бъде прескочен едновременно от два други). Възможно ли е всички скакалци да са на първоначалните си позиции след

- а) 2020 секунди?
- б) 2021 секунди?

Задача 2. Числата $1, 2, \dots, 100$ са записани на дъската в някакъв ред. Да се докаже, че можем да изберем 18 от тях u_1, \dots, u_{18} записани в този ред на дъската, но не задължително поредни, така че за всеки $i, j \in [1, 9]$ е изпълнено $u_{2i-1} < u_{2j-1}$ тогава и само тогава, когато $u_{2i} < u_{2j}$.

Задача 3. За един ход на дъска или се записват две единици, или се изтриват две вече написани еднакви числа n и вместо тях се записват $n+1$ и $n-1$. Най-малко за колко хода на дъската може да се получи числото 2021? (Първоначално на дъската не е записано нищо.)

Задача 4. Фиона и Снежанка играят следната игра: От торба с 1331 монети те започват да взимат монети. Първо Фиона взима 1, а на всеки следващ ход, принцесата, която играе, взима толкова монети, колкото са били взети на предишния ход, или с една повече. Пример за такава игра е $1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, \dots$. Който не може да направи ход по правилата на играта, губи. Кой печели при правилна игра?

Задача 5. В отсечка са отбелязани краен брой по-малки отсечки, които покриват голямата. Всяка по-малка отсечка е разделена по средата на две половини и дясната половина е премахната. Да се докаже, че левите половини покриват поне половината от голямата отсечка.

Задача 6. Даден е насочен граф с върхове $1, 2, \dots, n$. От всеки връх излизат между 0 и 2020 ребра и влизат неопределен брой други ребра. Освен това всяко ребро, излизащо от връх j , може да свърже j с връх i само ако $i < j$. Едно оцветяване е *допустимо*, ако никои два върха, съседни по ребро, не са оцветени в един и същи свят (посоката на реброто няма значение). Вярно ли е, че всеки граф, простроен както по-горе, има допустимо оцветяване в:

- 1. 2021 цвята?
- 2. 2020 цвята?