Ден 2

Задача 1. За кои $n \in \mathbb{N}$ има различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за които

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{N}?$$

Задача 2. Съществува ли множество от седем точки в равнината, за което сред всеки три точки има две на разстояние 1?

Задача 3. На дъската са написани числата 1, 9, 8, 2 в този ред. На всеки ход последните четири числа от ляво надясно се събират и отдясно на последното от тях се записва последната цифра на сбора (Например първият ход води до 1, 9, 8, 2, 0, понеже $1+9+8+2 = 20$). Ще се появи ли на дъската поредицата 4, 3, 3, 3? А 4, 4, 3, 3?

Задача 4. По средата на таблица 2020×1 е сложен пул. Двама играят следната игра: първият го мести с една позиция в някоя посока, после вторият го мести с две позиции в някоя посока, после първият го мести с четири, вторият с осем, и т.н. Който не може да играе, губи. Кой печели при правилна игра?

Задача 5. Всезнайко и Хитрушко разполагат с еднакви копия на таблица с 5 реда и 5 стълба, в чиито клетки са записани 25 различни числа. *Колекция* наричаме 5 числа, всяко от които се намира в различен ред и стълб от останалите. Всезнайко прави своята колекция по следния начин: взима най-голямото число от своята таблица и задрасква всички останали числа в реда и стълба на избраното число. После взима най-голямото от останалите числа, задрасква клетките в реда и стълба на избраното число и т.н. Хитрушко прави своята колекция по подобен начин, но на всеки ход взима най-малкото число. Нека сборът от числата в колекцията на Всезнайко е В, а сборът от числата в колекцията на Хитрушко е Х. Възможно ли е:
а) Х>В;
б) Х да е по-голям от сбора на числата във всяка колекция, различна от колекцията на Хитрушко?

Задача 6. Даден е граф със средна степен $d > 0$. Да се докаже, че може да се намери подграф на G с минимална степен поне $d/2$.