Ден 2

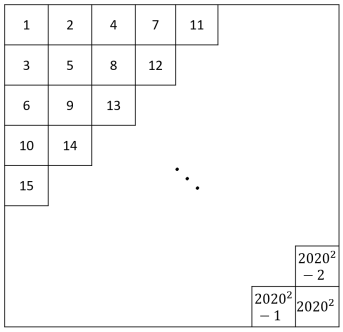
Задача 1. Братята Асен и Борис са фенове на "Левски"и ЦСКА съответно. Двамата имат комплект от n^3 дървени кубчета с размери $1 \times 1 \times 1$. Първоначално всичките им стени са сини. Асен желае да нареди кубчетата по такъв начин, че да получи куб $n \times n \times n$, чиято повърхност е изцяло синя. Борис успява да попречи на брат си, като преоцветява k от стените на малките кубчета в червено. Каква е минималната възможна стойност на k, когато $n = 3$? А когато $n = 1000$?

Задача 2. За кои $n \in \mathbb{N}$ има различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за които

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{N}?$$

Задача 3. Кое е най-голямото естествено число n, за което съществуват n точки в равнината със свойството, че сред всеки три от тях има две на разстояние 1?

Задача 4. Дадена е таблица с размери 2020×2020. В клетките ѝ са записани числата $1, 2, \ldots 2020^2$ по начина, илюстриран в таблицата по-долу (запълваме диагоналите с посока (дясно, горе) - (ляво, долу) един по един). Хитрушко избира 2020 клетки, всяка от които е в различен ред и стълб, и във всяка от тях поставя пул. В последствие той взима всеки пул и го поставя в клетка с по-голямо число (тази операция се извършва еднократно с всеки пул). Възможно ли е да се окаже, че във всеки ред и стълб има точно един пул?



Фигура 1: Номерата на част от клетките

Задача 5. Пермутация $x_1, \ldots, x_{2n}$ на множеството от числата 1 до $2n$ е *хубава*, ако съществува индекс $1 \leq i \leq 2n - 1$, за който $|x_i - x_{i+1}| = n$. Да се докаже, че повече от половината пермутации са хубави.

Задача 6. Всезнайко и Хитрушко разполагат с еднакви копия на таблица с 5 реда и 5 стълба, в чиито клетки са записани 25 различни числа. *Колекция* наричаме 5 числа, всяко от които се намира в различен ред и стълб от останалите. Всезнайко прави своята колекция по следния начин: взима най-голямото число от своята таблица и задрасква всички останали числа в реда и стълба на избраното число. После взима най-голямото от останалите числа, задрасква клетките в реда и стълба на избраното число и т.н. Хитрушко прави своята колекция по подобен начин, но на всеки ход взима най-малкото число. Нека сборът от числата в колекцията на Всезнайко е В, а сборът от числата в колекцията на Хитрушко е Х. Възможно ли е:
а) Х>В;
б) Х да е по-голям от сбора на числата във всяка колекция, различна от колекцията на Хитрушко?