

## Ден 3

**Задача 1.** Намерете всички естествени числа  $n \geq 3$ , за които съществува множество от  $n$  точки в равнината, такава че за всеки три точки от множеството  $A, B, C$  съществува четвърта точка  $D$ , за която  $ABCD$  образуват успоредник.

**Задача 2.** Даден е правилен шестоъгълник  $P$ . Едно число  $k$  се нарича *щастливо*, ако можем да разрежем  $P$  на  $k$  еднакви многоъгълника. Да се докаже, че съществуват безброй много естествени числа  $n$ , за които  $n$  и  $2^n + n$  са едновременно щастливи.

**Задача 3.** Охлюв пълзи по права линия шест минути. През това време, няколко души го наблюдават. Знае се, че всеки човек наблюдава охлюва точно една минута и в рамките на времето на всяко едно наблюдение охлювът изминава най-много един метър. Освен това, във всеки един момент охлювът е наблюдаван от поне един наблюдател. Колко е максималната дистанция, която охлювът би могъл да измине?

**Задача 4.** Даден е граф на  $n$  върха от максимална степен 5. Да се докаже, че можем да оцветим върховете на графа в 3 цвята, така че броят на едноцветните ребра да не превишава  $n/2$ .

**Задача 5.** Полетата на таблица  $n \times n$  са попълнени с 0-и и 1-ци така, че от всеки  $n$  клетки, никои 2 от които не са в един и същ ред и стълб, поне в една пише 1. Докажете, че съществуват  $i, j$ , за които  $i + j \geq n + 1$  и сечението им съдържа само 1-ци.

**Задача 6.** Змей Горянин има пред себе си квадратната решетка, като във всеки връх с ордината най-много 0 има поставен пул, а другите са празни (без пул). Змеят има право да вземе един пул  $a$  и да прескочи съседен по страна на него пул  $b$ , ако от другата страна на  $b$  има празен връх, а след това да премахне  $b$  от квадратната решетка. Например, ако с  $o$  означим празен връх, от  $a, b, o$  можем да получим  $o, o, a$ . Кое е максималното  $y$ , за което Змей Горянин може да сложи пул във връх с ордината  $y$ ?