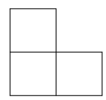
Ден 4

Задача 1. По колко начина може 1 000 000 да се представи като произведение на три множителя, ако редът на различните множители няма значение?

Задача 2. Нека е дадена дъска $n \times n$, където n е нечетно число. Дъската е оцветена шахматно, като горният ляв ъгъл е черен. За кои стойности на n можем да поставим няколко фигури като тази, показана на чертежа, така че да покрием всички черни квадратчета? (Фигурите могат да се въртят, но не трябва да излизат от очертанията на таблицата и не трябва да се припокриват.) Да се докаже, че в случаите, когато черните полета от дъската могат да бъдат покрити, минималният брой фигури за това е $(n+1)^2/4$.



Задача 3. Дадена е таблица $n \times n$, запълнена с числата $1, 2, \ldots, n$. На един ход можем да сменяме местата на два от редовете или да сменяме местата на два от стълбовете. Колко на брой са различните таблици, до които можем да достигнем?

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \text{n} \\
n & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\
n-1 & n & 1 & 2 & \ldots & n-2 \\
n-2 & n-1 & n & 1 & \ldots & n-3 \\
 & & & \vdots & & \\
2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1
\end{array}$$

Задача 4. В някои от клетките на таблица с размери

а) 4×4

б) $n \times n$

има по един скакалец. На всеки ход всеки скакалец скача в съседна по страна или връх клетка. При това във всяка клетка се оказало, че отново няма повече от един скакалец, но бившите съседи престанали да бъдат съседи. Какъв е най-големият брой скакалци, който може да има на дъската?

Задача 5. Да разгледаме безкраен двуделен граф с дялове $A = \{1, 2, \ldots\}$ и $B = \{-1, -2, \ldots\}$, чиито върхове имат по краен брой съседи.

а) Да допуснем, че за всяко подмножество C на A от k върха съществуват поне k различни върха в B, които са съседни на поне един от върховете в C. Винаги ли можем да намерим по един съсед на всеки връх от A, така че всички тези съседи да са различни?

б) Допускаме, че горното условие е изпълнено и при размяна на A и B. Можем ли да намерим биекция между A и B, която изпраща всеки връх в негов съсед?

Задача 6. Равнината е оцветена в 2020 цвята. Винаги ли можем да намерим правоъгълник с четири едноцветни върха? А равностранен тръгълник с три едноцветни върха?