Ден 1

Задача 1.1 На права е отбелязана отсечка AB и още 45 точки извън тази отсечка. Възможно ли е сумата от разстоянията на всяка от тези 45 точки до A да бъде равна на сумата от разстоянията на всяка от тези 45 точки до B?

Решение. Понеже точките са извън отсечката, то всяка точка е или наляво от A, или надясно от B. Нека означим с S разликата между разстоянията от точките до A и растоянията от точките до B. Тогава ако вземем точка, която е вляво от A, то S се увеличава с разликата на дължините на отсечките от тази точка до A и B, тоест се увеличава с дължината на AB. Ако пък вземем точка, вдясно от B, то S се намалява с дължината на AB. Но 45 е нечетно число, тоест след 45 хода или ще има повече добавени AB, или повече извадени AB, но никога 0, тоест сумата от разстоянията не може да е равна.

Задача 1.2 По окръжност са написани в някакъв ред четири единици и пет нули. На всеки ход записваме 1 между всеки две цифри, ако те са различни, и 0, ако са равни. След това изтриваме всички 9 цифри, получени на предния ход.

a) Възможно ли е, повтаряйки тази операция, да достигнем до конфигурация, в която всички цифри са равни?

b) А ако в началото имаме четири единици и шест нули?

Решение.

a) Да разгледаме последния ход. Ако имаме само единици, то на пред-последния ход сме имали редуващи се 0 и 1. Но това не е възможно, понеже имаме нечетен брой числа. Ако пък сме имали само нули на последния ход, то на предпоследния ход сме имали само единици, тоест на пред-предпоследния сме имали редуващи се нули и единици, което отново е невъзможно.

б) Изненадващо отново не е възможно. Отново трябва да сме минали през конфигурацията 0101010101. Обаче лесно се вижда, че е невъзможно да стигнем до конфигурация с нечетен брой единици. Напр. за горната конфигурация това означава, че $a_1 = a_2 = 1 - a_3 = 1 - a_4 = a_5 = a_6 = 1 - a_7 = 1 - a_8 = a_9 = a_{10} = 1 - a_1$, където a_i са цифрите на предишния ход. Това е противоречие, тъй като $a_1 = 1 - a_1$.

Задача 1.3 В блок от 120 апартамента живеят n души. Един апартамент е *препълнен*, ако в него има поне 15 души. Всеки ден всички хора в един от препълнените апартаменти, ако има такива, излизат и се преместват в различни апартаменти. Може ли след 120 дни в блока все още да има препълнен апартамент, ако

a) $n = 119$?

b) $n = 120$?

Решение.

a) Да допуснем, че в началото имаме препълнен апартамент. Ако след 15 хода все още имаме препълнен апартамент, то за тези 15 хода сме имали 15 препълнени апартамента. Нека забележим, че един апартамент, който току що е изпразнен няма как да бъде препълнен в следващите 14 хода. Но тогава в началото ни трябва поне един апартамент с 15, поне 1 апартамент с 14 (който да се превърне в апартамент с 15 на следващия ход), поне 1 апартамент с 13 (който да се превърне в апартамент с 15 след 2 хода), ... , поне един апартамент с 1 човек (който да се превърне в апартамент с 15 след 14 хода). Тогава ни трябват минимум $15 + 14 + 13 + ... + 2 + 1 = 120$.

б) Тук може да се направи вечно местене ако се вземат 16 от апартаментите със съответно $0, 1, 2, \dots, 15$ души и всеки ден апартаментът с 15 човека се разпределя между останалите 15. апартамента.

Задача 1.4 Дадени са числата от 1 до 10. Могат ли да се разделят на три групи A, B, C такива, че сумата на елементите на A да е най-голяма, произведението на елементите на B да е най-голямо и сумата от цифрите на елементите на C да най-голяма?

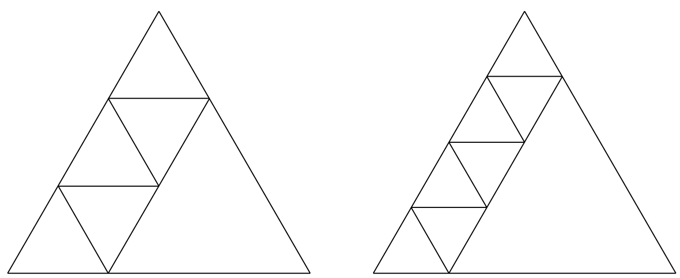
Решение. Да, възможно е. Можем да направим $A = \{1, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{4, 6, 8\}$.

Задача 1.5 Първоначално във всеки връх на куб е записано число. За един ход всяко число се заменя със средното аритметично на числата, които са записани в трите му съседни върха (замяната става едновременно). На десетия ход във всеки връх на куба се оказва отново числото, което е записано там в началото. Следва ли оттук, че всички числа са равни?

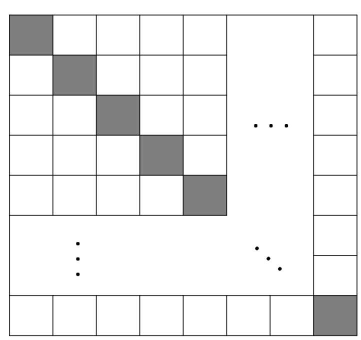
Решение. Не, не следва. Възможно е да оцветим върховете шахматно и след това в черните върхове да сложим единици, а в белите - нули. По този начин на всеки ход числата във върховете се сменят - единиците стават нули, а нулите стават единици. След 10 хода ще са в изходна позиция.

Задача 1.6 Докажете, че равностранен триъгълник може да се разреже на n равностранни триъгълника за всяко $n \geq 6$.

Решение. Първо нека забележим, че ако намерим пример за n и разделим един триъгълник в примера на 4 триъгълника използвайки трите средни отсечки, то получаваме разделяни на $n + 3$ триъгълника (един триъгълник се превръща в 4, тоест добавяме 3). Пример за 7 можем да получим, прилагайки 2 пъти тази операция, започвайки от само един равностранен триъгълник. Единственото, което ни остава е да дадем примери за 6 и 8.



Задача 2.1 В клетките на таблица 2021 на 2021 са записани числата от 1 до 2021. Всяко число се среща точно веднъж във всеки ред. Знаем, че за всеки две числа i и j между 1 и 2021 е изпълнено следното: в клетката на ред i и стълб j стои число, равно на това в клетката на ред j и стълб i. Да се докаже, че числата по диагонала, обозначен на чертежа, са две по две различни.



Решение. Понеже таблицата е симетрична спрямо диагонала, всички числа, които не са по диагонала се срещат по четен брой пъти. В цялата таблица всяко число се среща 2021 пъти. Това значи, че са ни останали по поне едно число от всяко от числата от 1 до 2021. Но ние имаме 2021 числа по диагонала, значи трябва да се среща всяко едно от числата по веднъж.

Задача 2.2 Всяка кръчма в едно царство принадлежи на една от три благороднически фамилии. При борбата с монопола царят издал следния указ: всеки ден, ако някоя фамилия притежава повече от половината кръчми, и това число се дели на 5, то на тази фамилия се затварят всички освен една пета от кръчмите. Може ли да се окаже, че след 3 дни всички фамилии са с по-малко кръчми, отколкото в началото.

Решение. Да може, например 20,35 и 60 кръчми.

Задача 2.3 Върху окръжност са отбелязани 2020 различни точки, които я разделят на 2020 дъги. Във всяка точка има заек. На всяка секунда зайците едновременно скачат по посока на часовниковата стрелка от края на своята дъга в нейната среда. Образуват се нови 2020 дъги и скачането продължава по същия начин. Възможно ли е поне един заек да се окаже в началната си позиция след 2020 скока?

Решение. Да допуснем, че е възможно и да вземем заека, който е успял и нека той в началото е в точка А. Нека отбележим, че два заека никога не могат да се изпреварят, тоест всички други зайци трябва да са минали през тази точка. Но на първия ход никой заек не може да мине през тази точка, а на всеки следващ ход най-много 1 заек може да прескочи точката, тоест за 2020 хода през точката могат да минат най-много 2019 заека, което е противоречие с нашето допускане.

Задача 2.4 Върху една окръжност са записани няколко естествени числа. Можем да извършваме следната операция: ако четири последователни числа a, b, c, d изпълняват $(a-d)(b-c) > 0$, то можем да разменим b и c. Да се докаже, че независимо как прилагаме операцията, ще стигнем до момент, в който няма как да направим повече ходове.

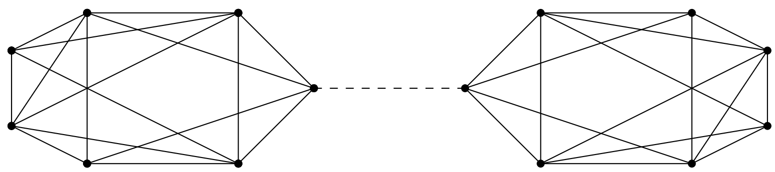
Решение. Нека разгледаме сбора на произведенията на всеки две поредни числа и го означим с S. Ако две числа изпълняват $(a-d)(b-c) > 0$, то $ab+cd-bd-ac > 0$ и значи $ab+cd > ac+bd$. Но когато сменим b и c, произведенията ab и cd се превръщат в произведенията ac и bd. Но това значи, че S намалява с всяка смяна. От друга страна S е положително число, понеже е сбор на произведения на цели числа. Но тогава S не може да намалява безркайно много, тоест в някакъв момент няма да можем да извършваме повече смени.

Задача 2.5 По средата на таблица 2020×1 е сложен пул. Двама играят следната игра: първият го мести с една позиция в някоя посока, после вторият го мести с две позиции в някоя посока, после първият го мести с четири, вторият с осем, и т.н. Който не може да играе, губи. Кой печели при правилна игра?

Решение. Забележете, че 5-я ход на първия може да закара пула на разстояние < 256 от центъра, понеже $1+2+\cdots+128 < 256$, съответно независимо от играта на двамата през първите 8 хода, на деветият ход пулът може да бъде движен в посока към центъра и да се отдалечи на не повече от 256. Тогава вторият с хода си трябва да го отдалечи на поне 256 от центъра, което значи, че първия ще има поне $256+2020/2 = 1266$ полета да се движи в едната посока, съответно ще може да направи хода си. А вторият не може да направи ход от 2048 полета, понеже толкова полета на дъската няма.

Задача 2.6 В една държава има 14 летища. От всяко можем да достигнем до 5 други (като всяка авиолиния е двупосочна). Заради лошо време линията между летищата Олеле и Мале е закрита. Можем ли да бъдем сигурни, че въпреки лошото време ще можем да стигнем от Олеле до Мале?

Решение. Примерът показва, че след махането на пунктираната линия, няма да можем да стигнем от левия до десния дял.



Задача 3.1 В правилен $2n$-ъгълник, n диагонала се пресичат в обща точка S. Да се докаже, че тази точка е центърът на $2n$-ъгълника.

Решение. Да допуснем противното - че S не е центърът. Но тогава тя лежи на поне един диагонал, който не свързва две противоположни точки. Да разгледаме този диагонал. Той разделя многоъгълника на две части, едната от които е по-малка от другата, и съответно съдържа по-малко от $n-1$ върха. Но всеки диагонал, който минава през S, освен разгледаният по-горе, свързва връх от малката част на многоъгълника с връх от по-голямата част на многоъгълника и тези върхове трябва да са различни. Това дава най-много от $n-1$ диагонала, противоречие.

Задача 3.2 На дъската е записано числото 1. Двама играчи се редуват, като всеки на своя ход има право да увеличи числото, записано на дъската, с 1, или да го удвои. Печели този, който първи напише трицифрено число. Кой ще спечели при правилна игра?

Решение. Печелившa стратегия за втория е да добавя винаги 1, докато на дъската се появи число между 50 и 99, в който момент умножава по две и печели. Тъй като след всеки ход на първия числото е четно, той първи ще напише число между 50 и 99.

Задача 3.3 Шахматна фигура се мести на 8 или 9 полета в хоризонтално или вертикално направление по дъска 15×15. Колко най-много полета може да обходи фигурата? (Няма ограничение от кое поле да започне обхождането.)

Решение. Можем да обходим всички полета освен централния ред и стълб. Примерът е сравнително лесен, можем да се местим 9 надясно и 8 наляво няколко пъти след това се качваме 9 нагоре, правим същите действия, след това слизаме 8 надолу, пак същите действия и т.н. Общо $7.7.4 = 196$ полета.

От друга страна, ако започнем извън централните ред и стълб, не можем да стигнем до тях, а ако започнем в тях, не можем да излезем. Значи действително 196 е максималният брой полета.

Задача 3.4 На един остров има 10 летища, някои от които са свързани с двупосочни авиолинии. При затваряне на които и да е две летища, от всяко от останалите ще можем да стигнем до всяко друго (може би с прекачване). Какъв е минималният брой авиолинии в държавата?

Решение. Първо нека забележим, че ако някое летище е свързано с по-малко от 3 други, то можем да го изолираме (като му махнем всички съседни летища) и по този начин няма да можем да стигнем от него до никъде. Тоест от всяко летище излизат поне 3 авиолинии. Ще дадем пример, където от всяко летище излизат точно 3. Взимаме правилен десетоъгълник и диагоналите, които свързват срещуположните му ъгли. Проверката показва, че примерът работи. Обърнете внимание, че трябва да проверим, че които и да е 2 летища да махнем останалите остват свързани (от съображения за симетрия имаме 5 случая за проверка), а не е достатъчно да знаем, че от всяко летище излизат 3 авиолинии.

Задача 3.5 В клетките на таблица 6×6 са поставени хиксове и кръгове. Полетата по главния диагонал съдържат хикс, а всички останали - кръг. За един ход се избира ред или стълб и за всяка клетка сменяме написаното в нея (от хикс на кръг или от кръг на хикс). Да се докаже, че броят на хиксовете винаги е поне 6. Вярно ли е, че броят на кръговете също винаги е поне 6?

Решение. Сред клетките от един и същи цвят има винаги поне един хикс и поне един кръг (четността на броя хиксове там не се променя).

1	6	1			6
1	2	1	2		
	2	3	2	3	
		3	4	3	4
5			4	5	4
5	6			5	6

Задача 3.6 Всяка клетка на квадратна таблица $n \times n$ съдържа 0 или 1. Сборът от числата на всеки ред е 3. Сборът от числата на всеки стълб е 3. За всеки правоъгълник, съставен от полета на таблицата, сборът от числата в клетките на върховете му е не повече от 3. Намерете най-малката възможна стойност на n.

Решение. Ще покажем, че за 6 не става (тоест и за всяко по-малко няма да стане). Без ограничение да кажем, че на първия ред първите 3 полета са единици и в първия стълб първите 3 полета са единици. Тогава второто и третото поле на втория ред и второто и третото поле на третия ред са нули, за да не се получи правоъгълник с единици. Но сега можем да забележим, че в правоъгълника 2×3 образуван от долните 3 полета на втория и третия стълб трябва да сложим 4 единици, което от принципа на Дирихле значи, че имаме поне две единици в един и същ ред на правоъгълника, които образуват с единиците на първия ред правоъгълник от единици. Сега даваме пример за 7:

$$\begin{matrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{matrix}$$

Задача 4.1 На всеки километър от пътя между Начално и Краево има табелка, от едната страна на която е написано разстоянието до Начално, а от другата - разстоянието до Краево. Всезнайко забелязал, че сумата от цифрите на двете числа на всяка табелка е 13. Какво е разстоянието между Начално и Краево?

Решение. 49 километра става. Ако са повече, то когато стигнем до 49 от Начално, ще имаме сбор над 13. Не може да е по-малко, защото 10 трябва да бъде с число със сбор 12, а най-малкото такова число е 39, тоест 39 е с 10. Ако пък нямаме и 10, тогава 9 трябва да е с 3, тоест 10 е с 2, но това не дава сбор от цифри 12.

Задача 4.2 Колко най-малко коня трябва да разположим на шахматна дъска, за да сме сигурни, че всяко бяло поле се заплашва от поне един кон?

Решение. Пример за разположение на 7 коня е: C3, G3, D4, F4, D6, F6, C7.

Да забележим, че полетата B1, H1, G2, B7, A8, G8 трябва да се запллашват от различни коне. За да имаме точно 6 коня е необходимо A2 и B1 да се заплашват от един и същ кон (т.е. има кон в C3) и подобно за H7 и G8. Тъй като C3 не заплашва C2, трябва да има кон, който заплашва едновременно C2 и G2. Но тогава по същия начин има кон заплашващ едновременно G2 и G6. Значи има два коня заплашващи G6 вместо само един, което дава желаното противоречие за 6 коня.

Задача 4.3 На опашка на каса за билети стоят $2n$ човека. Половината от тях имат по 50 стотинки, а другата половина имат по 1 лев. Ако всеки си купи точно по 1 билет, който струва 50 стотинки, колко са начините на подреждане на хората, при които касиерът (който започва деня без никакви пари) винаги може да върне ресто.

Решение. Това са точно числата на Каталан от лекцията Увод в рекурентните връзки. Наистина, търсим подредба, при която във всеки момент са минали не по-малко хора с 50ст. отколкото с по 1 лев. Съответно формулата е

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Задача 4.4 Дадена е таблица $1 \times N$. Двама играят следната игра. На своя ход първият слага кръстче, а вторият кръгче. Не се разрешава да се слагат кръстове или кръгове в 2 съседни полета (но може да се поставя кръстче до кръгче и обратното). Който не може да играе, губи. Кой печели при правилна игра?

Решение. Да допуснем, че $N > 1$. Ще дадем стратегия за втория. На първия си ход той ще играе в крайно поле (такова има, понеже са общо 2). Преди k-тия ход на втория играч между най-лявото и най-дясното кръстче има $k-2$ такива, които оставят $k-1$ интервала между две поредни кръстчета. На всеки свой ход след първия, вторият играч поставя кръгче на произволно място в интервал, където още няма кръгче. Такъв интервал има, тъй като първият ход на втория играч е в крайнно поле, което не е в никой от тези интервали.

Задача 4.5 Комплект домино съдържа 45 плочки - по една плочка, съответстваща на всяка възможна двойка от числата между 0 и 8 (включително двойките $(0,0)$, $(1,1)$, ..., $(8,8)$), като приемаме, че двойките (i,j) и (j,i) са една и съща двойка. Искаме да направим редица от плочки, като долепяме еднаквите числа. Каква е максималната дължина на такава редица?

Решение. Построяваме граф с върхове 0,1,2,3,...,8 и всички възможни ребра и примка във всеки връх. Едно ребро съответства на една плочка. Всеки връх е от степен 10, така че в графа съществува Ойлеров път (и цикъл), т.е. можем да подредим всичките домина.

Задача 4.6 Даден е изпъкнал $100-$ъгълник, в който никои три от диагоналите не се пресичат в обща точка. Докажете, че могат да се изберат 50 вътрешни точки така, че всеки връх да лежи на права, определена от някои две измежду избраните точки.

Решение. Нека даденият 100-ъгълник е $P_1P_2\dots P_{100}$. Точките $A_i = P_iP_{i+50} \cap P_{i+1}P_{i+51}$ за $i \in [50]$ вършат работа, където $P_{101} = P_1$. Наистина, $A_iA_{i+1} = P_iP_{i+50}$.