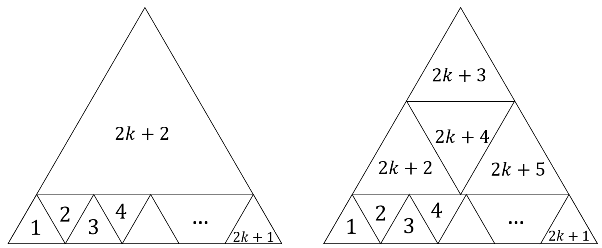
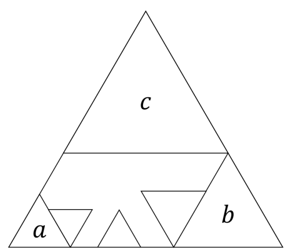
1 Ден 1

Задача 1.1. За кои n съществува разрязване на равностранен триъгълник на n равностранни триъгълника?

Решение. Такова разрязване съществува за $n = 1$ (самият триъгълник), $n = 4$ и за всяко $n \geq 6$. Можем да построим примери, като поберем "ивица"от $2k + 1$ квадратчета със страна $1/k$ (вж. Фигурата) в долната част на триъгълника. Всеки равностранен триъгълник на чертежа може да се раздели на 4 други чрез построяване на средните отсечки, което ни позволява да намерим остатъка от примерите за $n \geq 6$. Когато вземем $k = 1, 2, \ldots$ във фигурата, получаваме примерите за 4 и $n \geq 6$.



Остава да докажем, че за $n = 2, 3, 5$ няма как да се получи. Възможните ориентации на някой от равностранните триъгълници са две. Всеки от върховете на триъгълника е връх на точно един от триъгълниците в разрязването (понеже ъгълът при него е $60°$). Нека тези триъгълници са a, b, c. Ако два от тях съвпадат, това означава, че и трите съвпадат, т.е. има общо един равностранен триъгълник. Следователно, ако $n > 1$, то a, b, c са различни.



Следователно има поне един триъгълник с обратна ориентация на началния (той споделя страна с a например). Това дава $n \geq 4$. Ако всяка от страните на големия триъгълник е покрита изцяло от страните на a, b, c, то получаваме общо 4 триъгълника. В противен случай има страна (например тази, между върховете, отговарящи на a и b, която не е изцяло покрита от a и b. Но това означава, че има поне още един триъгълник с права ориентация, който лежи върху тази страна. Също така има триъгълник с обратна ориентация, долепен до една от страните на a и триъгълник с обратна ориентация, долепен до една от страните на b и двата няма как да съвпадат. Това дава $n \geq 6$.

Задача 1.2. На въженце има 42 скакалеца. Всяка секунда 7 от тези скакалци решават да прескочат свой съсед, и само него, като той стои неподвижен в това време (един скакалец не може да бъде прескочен едновременно от два други). Възможно ли е всички скакалци да са на първоначалните си позиции след

a) 2020 секунди?

b) 2021 секунди?

Решение. Номерираме скакалците с $1, 2, \ldots 42$ от ляво надясно. Един скок съответства на размяна на позициите на два скакалеца (този, който скача, и този, който е прескочен).
а)Да. Ако на всеки ход двойките скакалци $(1, 2), (3, 4), \ldots, (13, 14)$ се разменят, като винаги нечетният скакалец прескача четния, то след всеки четен ход ще се намираме в началната конфигурация.

b)Не. Ще наричаме една двойка от скакалци i, j (където $i < j$) *обърната*, ако скакалец j се намира преди скакалец i по въженцето. В началната конфигурация има 0 обърнати двойки.
Ако по време на един ход скакалците i и j се разменят (т.е. единия прескача другия), то единствената двойка, съдържаща i или j, която променя вида си, е двойката i, j, защото разположението им спрямо останалите скакалци по въженцето (т.е. дали са вляво или вдясно от даден скакалец) не се променя. Следователно на всеки ход се променя вида на точно 7 двойки. Нека на даден ход x от тях да се променят от необърнати на обърнати, и $7 - x$ от тях - от обърнати на необърнати. Тогава общо броят на обърнатите двойки се увеличава със $2x - 7$ (или намалява със $7 - 2x$). Следователно четността на броя обърнати двойки се променя на всяка секунда и няма как след 2021 секунди да имаме 0 обърнати двойки.

Задача 1.3. В блок от 120 апартамента живеят n души. Един апартамент е *препълнен*, ако в него има поне 15 души. Всеки ден всички хора в един от препълнените апартаменти, ако има такива, излизат и се преместват в различни апартаменти. Може ли след 120 дни в блока все още да има препълнен апартамент, ако

a) $n = 119$?

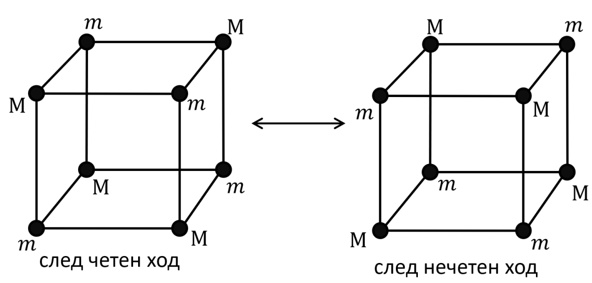
b) $n = 120$?

Решение. a) Не. Първо да забележим, че ако един апартамент е препълнен в края на i-тия ден, то в него ще има най-много k души в края на $i + 1 + k$-тия ден, т.е. апартаментът не е препълнен в края на дните $i+1, i+2, \dots, i+14$. Също така, ако в края на някой ден няма препълнен апартамент, то всеки човек остава където е, т.е. оттук нататък препълнен апартамент няма как да се появи. Нека сега допуснем, че след 120-тия ден има препълнен апартамент. От горните разсъждения следва, че е имало поне 1 препълнен апартамент в края на 119-тия ден (нека той е A_1), поне 1 в края на 118-тия ден (A_2) и т.н. Още повече, $A_1, A_2, \dots A_{15}$ са различни. Понеже броят души в даден апартамент нараства с най-много един човек, то в края на 105-тия ден в A_1 е имало поне 1 човек, в A_2 - поне 2-ма и т.н. Това дава, че броят хора е най-малко $1 + 2 + \cdots + 15 = 120$, противоречие.
b) Да. Ограничаваме се до 16 апартамента. Ако на някой ход в тях има $15, 14, \dots, 1, 0$ души съответно, то за разпределяйки 15-те души от препълнения апартамент в останалите води до същата конфигурация. Следователно можем да направим неограничен брой ходове.

Задача 1.4. Дадено е естествено число n. Първоначално във всеки връх на куб е записано число. За един ход всяко число се заменя със средното аритметично на числата, които са записани в трите му съседни върха (замяната става едновременно). На n-тия ход във всеки връх на куба се оказва отново числото, което е записано там в началото. За кои n следва оттук, че всички числа са равни?

Решение. Отговорът зависи от четността на n: за четно n е не, а за нечетно - да.

Ако n е четно, има пример, взимайки $m \neq M$:



Ако n е нечетно, да допуснем, че на n-тия ход сме получили началната конфигурация. Нека M е максималното число в тази конфигурация, а m - минималното. Тогава във всеки един момент всички числа остават между M и m. За да получим M във връх v след ход i, то преди да направим ход i всички от съседните му върхове трябва да са били M. Връщайки още един ход назад и прилагайки същото разсъждение за съседите на v, получаваме, че преди ход $i - 2$ е имало поне 4 върха, в които е било записано M. Можем да направим същото разсъждение за m. Да допуснем, че $m \neq M$. Започвайки от $i = 2n$ (удвояването е само с цел да разгледаме случая $n = 1$ заедно с останалите; да забележим, че след $2n$ хода отново се връщаме в началната конфигурация) и прилагайки горното разсъждение, ние получаваме, че след $2n-2$-рия ход конфигурацията изглежда като тази на фигурата по-горе. Правейки ход $2n-1$ и $2n$, получаваме, че всъщност началната конфигурация е същата като тази след ход $2n-2$. Но това означава, че след нечетните ходове имаме различна конфигурация (понеже $m \neq M$), противоречие.

Задача 1.5. Колко най-много коня могат да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всеки от тях да застрашава най-много седем други коня?

Решение. Виж задача 3 в `http://www.math.bas.bg/~telecom/CV/Nevena%20CV/temi/chess.pdf`

Задача 1.6. По окръжност са записани няколко положителни числа, всяко от които е не по-голямо от 1. Докажете, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че сборът от числата, записани на всяка дъга, да се различава от сбора на записаните на коя да е друга дъга числа с не повече от 1. (Ако на дъгата няма числа, сборът от записаните на нея числа се приема за 0.)

Решение. Виж задача 3 на стр. 53 в `http://www.math.bas.bg/~telecom/CV/Nevena%20CV/temi/Tournament_of_%20Towns.pdf`

2 Ден 2

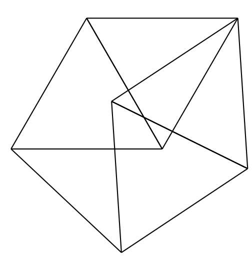
Задача 2.1. За кои $n \in \mathbb{N}$ има различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за които

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{N}?$$

Решение. Виж задача 1 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/1os10-12.pdf`.

Задача 2.2. Съществува ли множество от седем точки в равнината, за което сред всеки три точки има две на разстояние 1?

Решение. Да. На чертежа по-долу всяка черна отсечка е с дължина 1.



Задача 2.3. На дъската са написани числата 1, 9, 8, 2 в този ред. На всеки ход последните четири числа от ляво надясно се събират и отдясно на последното от тях се записва последната цифра на сбора (Например първият ход води до 1, 9, 8, 2, 0, понеже $1 + 9 + 8 + 2 = 20$). Ще се появи ли на дъската поредицата 4, 3, 3, 3? А 4, 4, 3, 3?

Решение. Разписвайки първите няколко числа от редицата, получаваме 1 9 8 2 0 9 9 0 8 6 3 7 4 0 4 5 3 2 4 4 3 3, така че 4 4 3 3 може. По индукция можем да докажем, че четностите на числата образуват повтаряща се редица от н н ч ч ч, т.е. няма как да получим повече от две последователни нечетни числа. Следователно 4, 3, 3, 3 никога няма да се появи на дъската.

Задача 2.4. По средата на таблица 2020×1 е сложен пул. Двама играят следната игра: първият го мести с една позиция в някоя посока, после вторият го мести с две позиции в някоя посока, после първият го мести с четири, вторият с осем, и т.н. Който не може да играе, губи. Кой печели при правилна игра?

Решение. Забележете, че 5-я ход на първия може да закара пула на разстояние <256 от центъра, понеже $1 + 2 + \cdots + 128 < 256$, съответно независимо от играта на двамата през първите 8 хода, на деветият ход пулът може да бъде движен в посока към центъра и да се отдалечи на не повече от 256. Тогава втория с хода си трябва да го отдалечи на поне 256 от центъра, което значи, че първия ще има поне $256 + 2005/2 = 1258$ полета да се движи в едната посока, съответно ще може да направи хода си. А втория не може да направи ход от 2048 полета, понеже толкова полета на дъската няма.

Задача 2.5. Всезнайко и Хитрушко разполагат с еднакви копия на таблица с 5 реда и 5 стълба, в чиито клетки са записани 25 различни числа. *Колекция* наричаме 5 числа, всяко от които се намира в различен ред и стълб от останалите. Всезнайко прави своята колекция по следния начин: взима най-голямото число от своята таблица и задраскваа всички останали числа в реда и стълба на избраното число. После взима най-голямото от останалите числа, задраскваа клетките в реда и стълба на избраното число и т.н. Хитрушко прави своята колекция по подобен начин, но на всеки ход взима най-малкото число. Нека сборът от числата в колекцията на Всезнайко е В, а сборът от числата в колекцията на Хитрушко е Х. Възможно ли е:
а) Х>В;
б) Х да е по-голям от сбора на числата във всяка колекция, различна от колекцията на Хитрушко?

Решение. Виж задача 6 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/27pr_r79t.pdf`.

Задача 2.6. Даден е граф G със средна степен $d > 0$. Да се докаже, че може да се намери подграф на G с минимална степен поне $d/2$.

Решение. Нека върховете на G са $v_1, \dots v_n$ и степените им са $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ съответно. По условие имаме $\frac{1}{n}(d_1 + \cdots + d_n) = d$. Ако $d_n \geq \frac{d}{2}$, то G е търсеният подграф. Ако ли не, премахвайки v_n от G, получаваме подграф G_1 на G, който има d_n по-малко ребра от G. Следователно сумата от степените е намаляла с $2d_n < 2\frac{d}{2} = d$, т.е. сумата от степените на G_1 е поне $nd - d = (n-1)d$. Следователно средната степен на G_1 е поне d. Отново можем да подредим върховете на G_1 според степента им. Ако минималната степен надхвърля $\frac{d}{2}$, сме готови, ако ли не - премахваме връх от минимална степен и получаваме граф G_2 със средна степен поне d. Прилагайки тази операция, ние винаги намаляваме с 1 броят върхове, но средната степен остава поне d. Ако можем да приложим операцията n пъти, получаваме граф с 0 върха. Но в него средната степен е $0 < d$, противоречие. Следователно по-рано сме стигнали до момент, в който вече не можем да приложим операцията. Графът G_k, до който сме стигнали в този момент, има минимална степен поне $\frac{d}{2}$.

3 Ден 3

Задача 3.1. На дъската е записано числото 1. Двама играчи се редуват, като всеки на своя ход има право да увеличи числото, записано на дъската, с 1 или да го удвои. Печели този, който първи напише трицифрено число. Кой ще спечели при правилна игра?

Решение. Печеливша стратегия за втория е да добавя винаги 1, докато на дъската се появи число между 50 и 99, в който момент умножава по две и печели. Тъй като след всеки ход на първия числото е четно, той първи ще напише число между 50 и 99.

Задача 3.2. Шахматна фигура се мести на 3 или 4 полета в хоризонтално или вертикално направление по дъска 5×5, като във всяко поле може да се постави най-много по един път. Колко най-много полета може да обходи фигурата? (Няма ограничение от кое поле да започне обхождането.)

Решение. Възможно е да обходим всички клетки в таблицата освен средния ред и средния стълб. Това прави 16 клетки.

8	14		3	9
6	12		5	11
1	15		2	16
7	13		4	10

Ако допуснем, че можем да посетим повече клетки, то задължително една от тях трябва да се намира в средния ред или средния стълб. Но с хода на фигурата от средния ред/стълб можем да достигнем само до средния ред/стълб, т.е. полетата, които фигурата ще е посетила са не повече от 5, противоречие.

Задача 3.3. Намерете всички естествени числа $n \geq 3$, за които съществува множество от n точки в равнината, такова че за всеки три точки A, B, C съществува четвърта точка D от множеството, за която A, B, C и D образуват успоредник.

Решение. $n = 4$ очевидно е решение на задачата (просто взимаме върховете на успоредник). Да допуснем, че някое $n \geq 5$ също е решение. Нека ABC да бъде триъгълник с максимално лице с върхове от зададеното множество от точки. Тогава съществува четвърта точка D, за която $ABCD$ е успоредник.

Ако има точка от множеството извън успоредника, това води до противоречие с факта, че ABC има максимално лице. От друга страна, ако има пета точка от множеството в успоредника, то по условие трябва да има и друга точка от множеството извън успоредника. При всички случаи достигаме до противоречие с максималността на лицето на ABC.

Задача 3.4. В клетките на таблица 6×6 са поставени хиксове и кръгове. Полетата по главния диагонал съдържат хикс, а всички останали - кръг. За един ход се избира ред или стълб и за всяка клетка сменяме написаното в нея (от хикс на кръг или от кръг на хикс). Да се докаже, че броят на хиксовете винаги е поне 6. Вярно ли е, че броят на кръговете също винаги е поне 6?

Решение. Сред клетките от един и същи цвят има винаги поне един хикс и поне един кръг (четността на броя хиксове там не се променя).

1	6	1			6
1	2	1	2		
	2	3	2	3	
		3	4	3	4
5			4	5	4
5	6			5	6

Задача 3.5. Охлюв пълзи по права линия шест минути. През това време, няколко души го наблюдават. Знае се, че всеки човек наблюдава охлюва точно една минута и в рамките на времето на всяко едно наблюдение охлювът изминава най-много един метър. Освен това, във всеки един момент охлювът е наблюдаван от поне един наблюдател. Колко е максималната дистанция, която охлювът би могъл да измине?

Решение. 10 метра.
Оценка: Ще докажем, че можем да изберем 10 наблюдатели, които заедно да са наблюдавали охлюва през цялото време. Нека наблюдател номер едно наблюдава охлюва от $0:00$ до $1:00$. Нека наблюдател номер три е този, който започва своето наблюдение след $1:00$ и е първият с това свойство. Или наблюдател три започва своето наблюдение в $1:00$, или в $1:\varepsilon$, където $\varepsilon \in (0,1)$. Във втория случай има наблюдател (наблюдател две), който наблюдава охлюва в интервала $[1:00, 1:\varepsilon]$ (виж начина, по който избрахме наблюдател три). Сега, правим същото разсъждение с наблюдател три и наблюдател пет, между които поместваме наблюдател четири и т.н. Можем да направим същото разсъждение до наблюдатели седем, осем и девет. В този случай наблюдател девет ще бъде на разстояние най-много 1 до края, затова наблюдател 10 ще бъде този, който наблюдава охлюва до края на шестата минута.
Пример:

Наблюдател: [0,1]; [0.01, 1.01]; [1.01, 2.01]; [1.02, 2.02]; [2.02, 3.02], [2.03, 3.03]; [3.04, 4.04]; [3.05, 4.05]; [4.06, 5.06]; [5,6].

Охлювът изминава по един метър през: [0, 0.01]; [1, 1.01]; [1.01, 1.02]; ... (т.е. когато го гледа точно един човек).

Задача 3.6. Даден е граф на n върха от максимална степен 5. Да се докаже, че можем да оцветим върховете на графа в 3 цвята, така че броят на едноцветните ребра да не превишава $n/2$.

Решение. Нека оцветим графа по произволен начин в началото. После, ако един връх има двама съседи от същия цвят като него, то има цвят, в който е оцветен най-много един от неговите съседи. В такъв случай преоцветяваме този връх, като по този начин намаляваме едноцветните ребра. Тъй като този процес е краен (едноцветните ребра намаляват), накрая всеки връх участва в най-много едно едноцветно ребро.

4 Ден 4

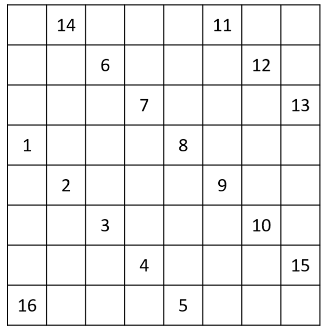
Задача 4.1. На петдесетата клетка на таблица 1×100 е сложен пул. Играят двама. Всеки може на своя ход да придвижи пула една или две клетки на някоя страна. Забранено е да се слага пула в клетка, в която вече е бил. Който не може да играе губи. Кой печели при правилна игра?

Решение. Ще докажем, че първият играч има печеливша стратегия. Разделяме полетата на таблицата на двойки $(1,2)(2,3),\ldots,(99,100)$. На първия ход първият играч слага пула в поле 49. Така двойката $(49,50)$ е запълнена, а всички други не са пипани. След това след всеки ход на втория играч, първият слага пула в другото поле от двойката, в която се намира пула. По симетрия този ход винаги е възможен, и първият играч печели защото винаги може да играе.

Забележете, че на първия ход допълваме двойката, в която се намира пулът в началото на играта. По друг начин казано, началната позиция на пула не влияе на резултата от играта. Четността на дължината на дъската обаче влияе.

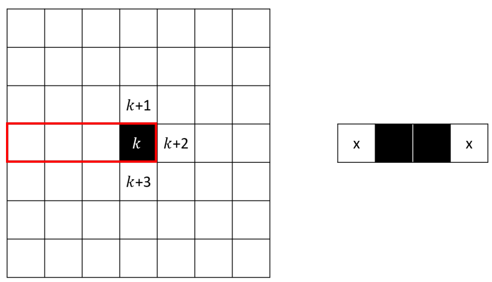
Задача 4.2. В шахматна дъска 8×8 тайно е избран правоъгълник 1×4 (или 4×1). На един ход имаме право да питаме дали определена клетка е от избрания правоъгълник. Можем ли със 17 хода да определим къде е скрития четириъгълник? Избираме полета от дъската в обозначения ред, докато не уцелим.

Решение.

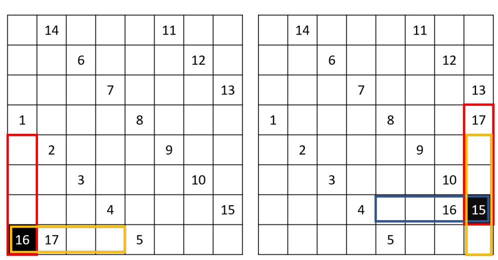


16-те полета на фигурата са така подбрани, че всеки правоъгълник 1×4 покрива точно 1 от тях. Следователно в даден момент ще уцелим поле от скрития правоъгълник.

Ако първото уцелено поле е $k \leq 13$, то можем да намерим скрития правоъгълник в следващите 4 хода чрез следната стратегия: проверяваме в посока на часовниковата стрелка всички без едно от съседните полета на уцеленото, като спираме, ако улучим повторно.



Ако не сме улучили повторно, то има точно една възможност за разположението на скрития правоъгълник (на фигурата вляво е илюстриран случая, когато клетката k има 4 съседа) и сме готови.
Ако k има четири съседи и улучим третия проверен съсед ($k+3$ на фигурата), то отново има едно единствено възможно разположение на скрития правоъгълник - правоъгълникът, разположен в стълба на k, включващ k и долните 3 квадратчета.
Ако улучим повторно в първия или втория проверен съсед, то получаваме две улучени квадратчета едно до друго. Те определят еднозначно стълба или реда, който съдържа изцяло скрития правоъгълник. Проверявайки съседите на улучените квадратчета в този стълб или ред е достатъчно, за да намерим разположението на скрития квадрат (фигурата вдясно).
Ако първото улучено поле е $k = 14, 15$ или 16, то следваме една от двете стратегии, изобразени на картинката по-долу (стратегията за 14 е аналогична на тази за 15).



Задача 4.3. По колко начина може 1 000 000 да се представи като произведение на три множителя, ако редът на различните множители има значение?

Решение. $1000000 = 10^6 = 2^6.5^6$. Нека трите множителя са a, b, c. Първо броим начините да разпределим степените на двойката между тях. Ако a се дели точно на 2^k, то остава да разпределим $6-k$ двойки между b

и c. Избирайки точната степен, деляща b, получаваме еднозначно тази на c. Имаме $6-k+1$ възможности за степента, деляща точно b: $0, 1 \dots, 6-k$. Това означава, че броят начини да определим степените на двойките е

$$(6-0+1)+(6-1+1)+(6-2+1)\cdots+(6-6+1)=28.$$

Получаваме същия брой начини да разпределим степените на 5. Следователно отговорът е $28^2 = 784$.

Задача 4.4. Дадена е таблица $1 \times N$. Двама играят следната игра. На своя ход първият слага кръстче, а вторият кръгче. Не се разрешава да се слагат кръстове или кръгове в 2 съседни полета (но може да се поставя кръстче до кръгче и обратното). Който не може да играе, губи. Кой печели при правилна игра?

Решение. Да допуснем, че $N > 1$. Ще дадем стратегия за втория. На първия си ход той ще играе в крайно поле (такова има, понеже са общо 2). Преди k-тия ход на втория играч между най-лявото и най-дясното кръстче има $k-2$ такива, които оставят $k-1$ интервала между две поредни кръстчета. На всеки свой ход след първия, вторият играч поставя кръгче на произволно място в интервал, където още няма кръгче. Такъв интервал има, тъй като първият ход на втория играч е в крайнно поле, което не е в никой от тези интервали.

Задача 4.5. В квадратчетата на дъска 8×8 са поставени топове (по един във всяко поле). Казваме, че един топ е *весел*, ако заплашва 1 или 3 от останалите. На един ход можем да свалим някой весел топ от дъската. Колко най-много хода могат да се направят? (Два топа се застрашават един друг, ако са в един и същ ред или стълб, в който няма други топове между тях.)

Решение. Виж задача 3 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/1ossol7-9.pdf`.

Задача 4.6. Даден е изпъкнал $100-$ъгълник, в който никои три от диагоналите не се пресичат в обща точка. Докажете, че могат да се изберат 50 вътрешни точки така, че всеки връх да лежи на права, определена от някои две измежду избраните точки.

Решение. Нека даденият 100-ъгълник е $P_1P_2\dots P_{100}$. Точките $A_i = P_iP_{i+50} \cap P_{i+1}P_{i+51}$ за $i \in [50]$ вършат работа, където $P_{101} = P_1$. Наистина, $A_iA_{i+1} = P_iP_{i+50}$.