Ден 1

Задача 1. На въженце има 42 скакалеца. Всяка секунда 7 от тези скакалци решават да прескочат свой съсед, и само него, като той стои неподвижен в това време (един скакалец не може да бъде прескочен едновременно от два други). Възможно ли е всички скакалци да са на първоначалните си позиции след

a) 2020 секунди?

b) 2021 секунди?

Задача 2. Числата $1, 2, \ldots, 100$ са записани на дъската в някакъв ред. Да се докаже, че можем да изберем 18 от тях $u_1, \ldots, u_{18}$ записани в този ред на дъската, но не задължително поредни, така че за всеки $i, j \in [1, 9]$ е изпълнено $u_{2i-1} < u_{2j-1}$ тогава и само тогава, когато $u_{2i} < u_{2j}$.

Задача 3. За един ход на дъска или се записват две единици, или се изтриват две вече написани еднакви числа n и вместо тях се записват $n+1$ и $n-1$. Най-малко за колко хода на дъската може да се получи числото 2021? (Първоначално на дъската не е записано нищо.)

Задача 4. Фиона и Снежанка играят следната игра: От торба с 1331 монети те започват да взимат монети. Първо Фиона взима 1, а на всеки следващ ход, принцесата, която играе, взима толкова монети, колкото са били взети на предишния ход, или с една повече. Пример за такава игра е $1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, \ldots$ Който не може да направи ход по правилата на играта, губи. Кой печели при правилна игра?

Задача 5. В отсечка са отбелязани краен брой по-малки отсечки, които покриват голямата. Всяка по-малка отсечка е разделена по средата на две половини и дясната половина е премахната. Да се докаже, че левите половини покриват поне половината от голямата отсечка.

Задача 6. Даден е насочен граф с върхове $1, 2, \ldots, n$. От всеки връх излизат между 0 и 2020 ребра и влизат неопределен брой други ребра. Освен това всяко ребро, излизащо от връх j, може да свърже j с връх i само ако $i < j$. Едно оцветяване е *допустимо*, ако никои два върха, съседни по ребро, не са оцветени в един и същи свят (посоката на реброто няма значение). Вярно ли е, че всеки граф **без триъгълници**, простроен както по-горе, има допустимо оцветяване в:

1. 2021 цвята?

2. 2020 цвята?

Кратки решения и упътвания

Решение на задача 1. Нека номерираме скакалците с номера 1, 2,..., 42 според първоначалният им ред.

а) Да. Ако скакалци с номера 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 прескачат съответно скакалци с номера 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 на нечетните ходове, а на четните се връщат обратно, то всички те са си по местата на 2020-я ход.

б) Не. Нека една двойка от скакалци (i, j) наричаме *инверсна* в даден момент, ако в този момент скакалецът с по-голям номер се намира по въженцето преди скакалецът с по-малък номер. На всеки ход броят на инверсните двойки сменя четността си, тоест на 2021-я ход този брой е нечетен. $\square$

Решение на задача 2. Нека разбием числата от 1 до 100 на 10 групи: от 1 до 10, от 11 до 20, от 21 до 30, ..., от 91 до 100. Ако едно число е *замразено*, то не може да бъде включено в избора на $u_1, v_1, \ldots, u_9, v_9$. Правим следното, разглеждаме първото, второто, третото, ... число от пермутацията до момента, в който две числа не попаднат в една и съща група. В този момент ние избираме първото число да бъде u_1, второто да бъде v_1, и замразяваме всички разгледани засега числа, както и всички числа от групата на u_1 и v_1. След това продължаваме разглеждането на следващите числа от пермутацията до момента, когато сме попаднали на две незамразени числа от една и съща група. Избираме първото от тях да бъде u_2, второто да е v_2, и замразяваме всички разгледани досега числа, както и всички числа от групата на u_2 и v_2. Продължавайки по същия начин, построяваме две редици с 9 члена, които имат исканото свойство. $\square$

Решение на задача 3. Виж задача 6 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/1ossol10-12.pdf`. $\square$

Решение на задача 4. Нека на всеки свой ход Фиона взема 1, 2, 3, 4, ... монети без значение как играе Снежанка. Когато Фиона вземе 36 монети, то общият брой на взетите монети е между $1+1+2+2+\cdots+35+35+36 = 1296$ и $1+2+2+3+3+\cdots+35+36+36 = 1331$. В частност, след като Фиона вземе 36 монети, Снежанка има на разположение между 0 и 35 оставащи монети, следователно не може да направи ход и губи играта. $\square$

Упътване на задача 5. (По идея на Никола Гюлев) Опитайте индукция по броят на отсечките, покриващи голямата. Индукционната стъпка се състои в премахване на някоя от отсечките, покриващи най-левия край на голямата. $\square$

Упътване на задача 6. По първата точка отговорът е да. Да забележим, че можем да оцветим върховете в последователен ред - всеки връх може да бъде оцветен в някой от 2021-те цвята, без да получим едноцветно ребро, понеже в момента, когато достигнем този връх, той има максимум 2020 оцветени съседи.

По втората точка отговорът е не. Можем да построим по индукция граф, който няма оцветяване в $s \in [2, 2020]$ цвята, както следва. За $s = 2$ можем да изберем цикъл с дължина 5. Ако за $k = s - 1$ имаме пример, то нека разгледаме s копия на този пример $G_1, G_2, \ldots, G_s$ и за всяка $k-$орка от върхове $v_1, v_2, \ldots, v_s$ в $G_1, G_2, \ldots, G_s$ съответно добавим връх $w(v_1, v_2, \ldots, v_s)$, който има ребро, насочено точно към тези върхове. Това ни дава конструкция на граф, който не може да бъде оцветен с $k + 1 = s$ цвята $\square$