Ден 2

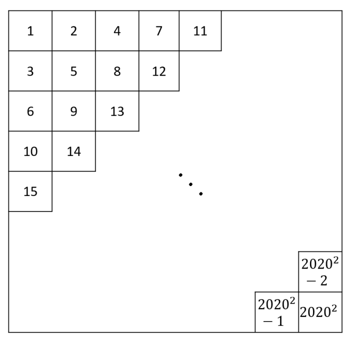
Задача 1. Братята Асен и Борис са фенове на "Левски"и ЦСКА съответно. Двамата имат комплект от n^3 дървени кубчета с размери $1 \times 1 \times 1$. Първоначално всичките им стени са сини. Асен желае да нареди кубчетата по такъв начин, че да получи куб $n \times n \times n$, чиято повърхност е изцяло синя. Борис успява да попречи на брат си, като преоцветява k от стените на малките кубчета в червено. Каква е минималната възможна стойност на k, когато $n = 3$? А когато $n = 1000$?

Задача 2. За кои $n \in \mathbb{N}$ има различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, за които

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \in \mathbb{N}?$$

Задача 3. Кое е най-голямото естествено число n, за което съществуват n точки в равнината със свойството, че сред всеки три от тях има две на разстояние 1?

Задача 4. Дадена е таблица с размери 2020×2020. В клетките ѝ са записани числата $1, 2, \ldots 2020^2$ по начина, илюстриран в таблицата по-долу (запълваме диагоналите с посока (дясно, горе) - (ляво, долу) един по един). Хитрушко избира 2020 клетки, всяка от които е в различен ред и стълб, и във всяка от тях поставя пул. В последствие той взима всеки пул и го поставя в клетка с по-голямо число (тази операция се извършва еднократно с всеки пул). Възможно ли е да се окаже, че във всеки ред и стълб има точно един пул?



Фигура 1: Номерата на част от клетките

Задача 5. Пермутация $x_1, \ldots, x_{2n}$ на множеството от числата 1 до $2n$ е *хубава*, ако съществува индекс $1 \leq i \leq 2n-1$, за който $|x_i - x_{i+1}| = n$. Да се докаже, че повече от половината пермутации са хубави.

Задача 6. Всезнайко и Хитрушко разполагат с еднакви копия на таблица с 5 реда и 5 стълба, в чиито клетки са записани 25 различни числа. *Колекция* наричаме 5 числа, всяко от които се намира в различен ред и стълб от останалите. Всезнайко прави своята колекция по следния начин: взима най-голямото число от своята таблица и задраска всички останали числа в реда и стълба на избраното число. После взима най-голямото от останалите числа, задраска клетките в реда и стълба на избраното число и т.н. Хитрушко прави своята колекция по подобен начин, но на всеки ход взима най-малкото число. Нека сборът от числата в колекцията на Всезнайко е B, а сборът от числата в колекцията на Хитрушко е X. Възможно ли е:

а) X>B;

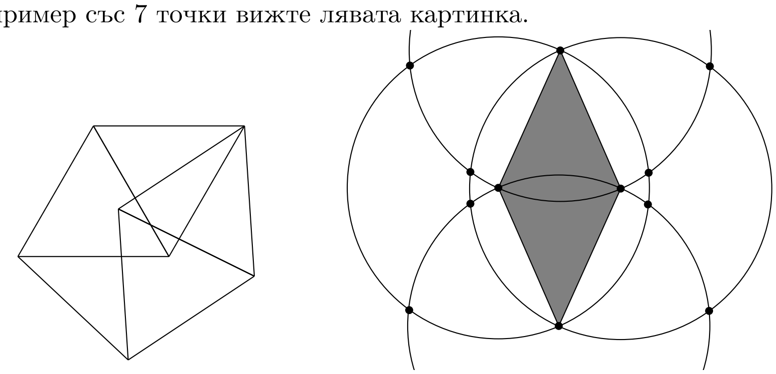
б) X да е по-голям от сбора на числата във всяка колекция, различна от колекцията на Хитрушко?

Кратки решения и упътвания

Решение на задача 1. Виж задача 6 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/27pr_r79t.pdf`. ☐

Решение на задача 2. Виж задача 1 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/1os10-12.pdf`. ☐

Решение на задача 3. За пример със 7 точки вижте лявата картинка.



Ще докажем, че с осем върха конструкция със исканото свойство не съществува. Свързваме две точки с отсечка, ако разстоянието между тях е равно на 1. Това образува граф. Ако има връх от степен 3 или по-малко, тези, които не са му съседи са поне 4 и са 2 по 2 на разстояние 1 - противоречие. Значи всеки е от степен поне 4. Обаче всеки двама имат най-много 2ма общи съседи, което за 2 несъседни върха дава, че графът е 4-регулярен и всеки 2 несъседни върха имат по точно 2 общи съседа.

Да допуснем, че в графа съществува индуциран 4-цикъл (т.е. цикъл, в който двете "диагонални"ребра липсват). Тогава за всяка двойка съседни върхове в цикъла има точно две точки, които са на разстояние едно и от двата върха. Тъй като това образува 8 различни точки (Проверете!), получаваме противоречие с факта, че има само 8 отбелязани точки.

В противен случай всеки 4-цикъл има точно една хорда и всяко не-ребро е липсващо в такъв 4-цикъл. Нека AB липсва в $ABCD$ и E и F са последните съседи на C и D съответно. Понеже ED не е ребро (има вече 2-ма общи съседи между C и D) и FC аналогично, получаваме (за да няма индуциран 4-цикъл), че EF също не е ребро, откъдето, тъй като всеки връх е от степен 4, едно от EA, EB е ребро и едно от FA, FB е ребро. Във всички случаи E и F са на разстояние поне 2 (виж картинката), а трябва в същото време да са съседни на двата оставащи върха - противоречие. ☐

Решение на задача 4. Виж задача 7 от `http://www.math.bas.bg/tgr/26/P79OS.pdf`. ☐

Решение на задача 5. Нека B е множеството от лошите пермутации, а G – на хубавите. Дефинираме функция от B в G

$$f((x_1, \dots, x_{2n})) = (x_2, x_3, \dots, x_k, x_1, x_{k+1}, \dots, x_{2n}),$$

където k е единственият индекс, за който $|x_1 - x_k| = n$. Пермутациите, които се получават така имат само един скок от n, така че имаме обратна функция. Има и строго неравенство - $(1, n+1, 2, n+2, \dots, 2n)$ не е образ на никоя пермутация в B на функцията f. ☐

Решение на задача 6. Виж задача 8 от `http://www.math.bas.bg/tgr/27/27pr_r79o.pdf`. ☐