Ден 3

Задача 1. Намерете всички естествени числа $n \geq 3$, за които съществува множество от n точки в равнината, такова че за всеки три точки от множеството A, B, C съществува четвърта точка D, за която $ABCD$ образуват успоредник.

Задача 2. Даден е правилен шестоъгълник P. Едно число k се нарича *щастливо*, ако можем да разрежем P на k еднакви многоъгълника. Да се докаже, че съществувт безброй много естесвени числа n, за които n и $2^n + n$ са едновременно щастливи.

Задача 3. Охлюв пълзи по права линия шест минути. През това време, няколко души го наблюдават. Знае се, че всеки човек наблюдава охлюва точно една минута и в рамките на времето на всяко едно наблюдение охлювът изминава най-много един метър. Освен това, във всеки един момент охлювът е наблюдаван от поне един наблюдател. Колко е максималната дистанция, която охлювът би могъл да измине?

Задача 4. Даден е граф на n върха от максимална степен 5. Да се докаже, че можем да оцветим върховете на графа в 3 цвята, така че броят на едноцветните ребра да не превишава $n/2$.

Задача 5. Полетата на таблица $n \times n$ са попълнени с 0-и и 1-ци така, че от всеки n клетки, никои 2 от които не са в един и същ ред и стълб, поне в една пише 1. Докажете, че може да маркираме i реда и j стълба, за които $i + j \geq n + 1$ и всяка клетка в сечението на маркиран ред и маркиран стълб съдържа 1-ца.

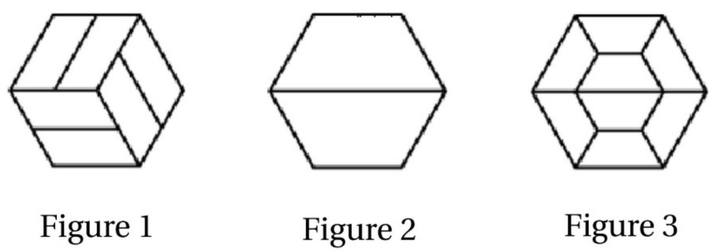
Задача 6. Змей Горянин има пред себе си квадратната решетка, като във всеки връх с ордината най-много 0 има поставен пул, а другите са празни (без пул). Змеят има право да вземе един пул a и да прескочи съседен по страна на него пул b, ако от другата страна на b има празен връх, а след това да премахне b от квадратната решетка. Например, ако с o означим празен връх, от a, b, o можем да получим o, o, a. Кое е максималното y, за което Змей Горянин може да сложи пул във връх с ордината y?

Кратки решения и упътвания

Решение на задача 1. $n = 4$ очевидно е решение на задачата. Да допуснем, че някое $n \geq 5$ също е решение. Нека ABC да бъде триъгълник с максимално лице с върхове от зададеното множество от точки. Тогава съществува четвърта точка D, за която $ABCD$ е успоредник.

Ако има точка от множеството извън успоредника, това води до противоречие с факта, че ABC има максимално лице. От друга страна, ако има пета точка от множеството в успоредника, то по условие трябва да има и друга точка от множеството извън успоредника. При всички случаи достигаме до противоречие с максималността на лицето на ABC. □

Решение на задача 2. Всички числа от вида $3k$ и 2.4^k са щастливи.



Фигура 1: Пример.

За второто число, достатъчно е да забележим, че един трапец, получен от разделянето на правилния шестоъгълник, може да бъде разделен на 4 еднакви трапци. Оттук нататък, когато $n \equiv 2 \mod 6$, имаме $2^n + n \equiv 1 + 2 \equiv 0 \mod 3$. Освен това $2.4^k \equiv 2 \mod 3$, което заедно с $2|2.4^k$ означава, че $2.4^k \equiv 2 \mod 6$ за всяко k. □

Решение на задача 3. Отговор: 10 метра.

Оценка: Ще докажем, че можем да изберем 10 наблюдатели, които заедно да са наблюдавали охлюва през цялото време. Нека наблюдател номер едно наблюдава охлюва от $0 : 00$ до $1 : 00$. Нека наблюдател номер три е този, който започва своето наблюдение след $1 : 00$ и е първият с това свойство. Или наблюдател три започва своето наблюдение в $1 : 00$, или в $1 : \varepsilon$, където $\varepsilon \in (0, 1)$. Във втория случай има наблюдател (наблюдател две), който наблюдава охлюва в интервала $[1 : 00, 1 : \varepsilon]$ (виж начина, по който избрахме наблюдател три). Сега, правим същото разсъждение с наблюдател три и наблюдател пет, между които поместваме наблюдател четири и т.н. Можем да направим същото разсъждение до наблюдатели седем, осем и девет. В този случай наблюдател девет ще бъде на разстояние най-много 1 до края, затова наблюдател 10 ще бъде този, който наблюдава охлюва до края на шестата минута.

Пример:

Наблюдатели: [0,1]; [0.01, 1.01]; [1.01, 2.01]; [1.02, 2.02]; [2.02, 3.02], [2.03, 3.03]; [3.04, 4.04]; [3.05, 4.05]; [4.06, 5.06]; [5,6].

Охлювът изминава по един метър през: [0, 0.01]; [1, 1.01]; [1.01, 1.02]; ... (т.е. когато го гледа точно един човек). □

Решение на задача 4. Нека оцветим графа по произволен начин в началото. После, ако един връх има двама съседи от същия цвят като него, то има цвят, в който е оцветен най-много един от неговите съседи. В такъв случай преоцветяваме този връх, като по този начин намаляваме едноцветните ребра. Тъй като този процес е краен (едноцветните ребра намаляват), накрая всеки връх участва в най-много едно едноцветно ребро. □

Решение на задача 5. Разглеждаме граф с върхове редовете и стълбовете на таблицата, в който ред и стълб са свързани, ако в клетката, в която се пресичат пише 0. Търсим множество от $n + 1$ върха без ребро. От задача 1 от лекцията Сдвоявания 1/3 и теоремата на Кьониг от същата лекция следва, че е достатъчно да докажем, че най-голямото сдвояване на графа има най-много $n-1$ ребра. По условие пълно сдвояване няма, така че задачата е решена. $\square$

Решение на задача 6. За $y=4$ има пример (Докажете го!). Ще докажем, че Змей Горянин не може да сложи пул във връх с ордината $y=5$. Да допуснем противното и в частност без ограничение да допуснем, че Змей Горянин успява да сложи пул във върха (0,5). Да запишем във всяка точка (i,j) числото $\phi^{-|i|-j}$, където $\phi>1$ е решение на уравнението $\phi^2=\phi+1$. На един пул съпоставяме тежест, която съответства на точката, в която се намира. Забележете, че при всеки ход на Змей Горянин сумата от тежестите на пуловете, които остават на дъската, не може да се увеличи. От друга страна, лесно се проверява, че сумата от тежестите на пуловете в началото е по-малка от ϕ^5. Противоречие. $\square$