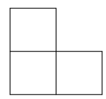
Ден 4

Задача 1. По колко начина може 1 000 000 да се представи като произведение на три множителя, ако редът на различните множители няма значение?

Задача 2. Нека е дадена дъска $n \times n$, където n е нечетно число. Дъската е оцветена шахматно, като горният ляв ъгъл е черен. За кои стойности на n можем да поставим няколко фигури като тази, показана на чертежа, така че да покрием всички черни квадратчета? (Фигурите могат да се въртят, но не трябва да излизат от очертанията на таблицата и не трябва да се припокриват.) Да се докаже, че в случаите, когато черните полета от дъската могат да бъдат покрити, минималният брой фигури за това е $(n+1)^2/4$.



Задача 3. Дадена е таблица $n \times n$, запълнена с числата $1, 2, \dots, n$. На един ход можем да сменяме местата на два от редовете или да сменяме местата на два от стълбовете. Колко на брой са различните таблици, до които можем да достигнем?

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \text{n} \\
n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\
n-1 & n & 1 & 2 & \dots & n-2 \\
n-2 & n-1 & n & 1 & \dots & n-3 \\
 & & & \vdots & & \\
2 & 3 & 4 & \dots & n & 1
\end{array}$$

Задача 4. В някои от клетките на таблица с размери

а) 4×4

б) $n \times n$

има по един скакалец. На всеки ход всеки скакалец скача в съседна по страна или връх клетка. При това във всяка клетка се оказало, че отново няма повече от един скакалец, но бившите съседи престанали да бъдат съседи. Какъв е най-големият брой скакалци, който може да има на дъската?

Задача 5. Да разгледаме безкраен двуделен граф с дялове $A = \{1, 2, \dots\}$ и $B = \{-1, -2, \dots\}$, чиито върхове имат по краен брой съседи.

а) Да допуснем, че за всяко подмножество C на A от k върха съществуват поне k различни върха в B, които са съседни на поне един от върховете в C. Винаги ли можем да намерим по един съсед на всеки връх от A, така че всички тези съседи да са различни?

б) Допускаме, че горното условие е изпълнено и при размяна на A и B. Можем ли да намерим биекция между A и B, която изпраща всеки връх в негов съсед?

Задача 6. Равнината е оцветена в 2020 цвята. Винаги ли можем да намерим правоъгълник с четири едноцветни върха? А равностранен триъгълник с три едноцветни върха?

Кратки решения и упътвания

Решение на задача 1. Отговор: 139. Да разгледаме възможните степени на двойката в трите множителя. Те са $(6,0,0),(5,1,0),(4,2,0),(4,1,1),(3,3,0),(3,2,1),(2,2,2)$. Да разгледаме по колко начина можем да разпределим срепените на петицата. В случаите на всяко от разпределенията $(6,0,0),(4,1,1)$ и $(3,3,0)$ имаме $1+3\cdot 2+3\cdot 3=16$ начина да разпределим степените на петицата. В случаите на всяко от разпределенията $(5,1,0),(4,2,0)$ и $(3,2,1)$ имаме $1+3\cdot 3+3\cdot 6=28$ начина да разпределим степените на петицата. Накрая, в случая на разпределението $(2,2,2)$ имаме точно $1+3+3=7$ начина да разпределим степените на петицата. Това дава общо $3\cdot 16+3\cdot 28+7=139$ начина да запишем 1000000 като произведение на три множителя, без реда да има значение.

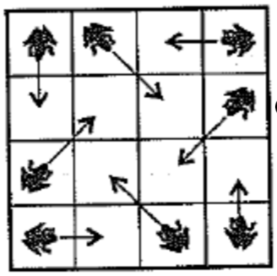
Забележка: По време на математическия бой пропуск в решението на журито бе коригиран от Демира Недева, за което журито ѝ благодари. Въпросното решение е представено по-горе. □

Решение на задача 2. `https://prase.cz/kalva/short/soln/sh02c2.html` □

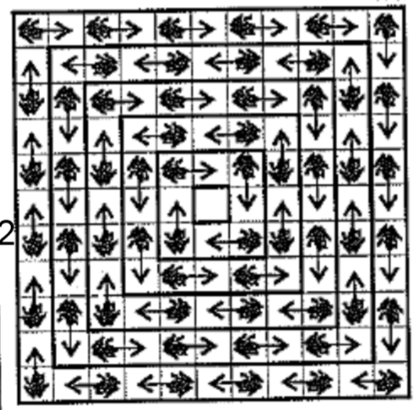
Решение на задача 3. (По идея на Ясен Пенчев) $n!(n-1)!$. Да забележим следното свойство на зададената таблица. Да разгледаме елементите на таблицата по модул n. Тогава в началото всеки ред може да се получи от всеки друг чрез добавяне на елемент $k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. От друга страна, фиксирайки даден ред, останалите $n-1$ се получават след добавяне на различни остатъци измежду $1,2,\ldots,n-1$ по модул n към вече фиксирания ред. Това свойство, от една страна, важи и за стълбовете на таблицата, а от друга страна, то се запазва при размяна на редовете и стълбовете на таблицата. Оттук заключаваме, че първият ред и първият стълб еднозначно определят елементите на таблицата - разликата между двата първи елемента в два реда по модул n определя разликата на всяка двойка елементи в тези два реда, които се намират в един и същи стълб. Аналогично е твърдението за стълбовете. От друга страна, първият ред се запълва по $n!$ начина, а елементите на първия стълб, без вече определения елемент в клетка (1,1), се определят по още $(n-1)!$ начина. □

Решение на задача 4. Отговор: $n^2/2$ за четни или $(n^2-1)/2-$ за нечетни. Задачата се състои от две части - пример и оценка. Оценката се прави елементарно, понеже всеки скакалец трябва да може да скочи в различна клетка, а ако се окаже, че някой скакалец скочи в клетка, в която преди е имало друг, то тези два скакалеца са били съседи преди и отново са съседи сега, противоречие. Примерите са следните:

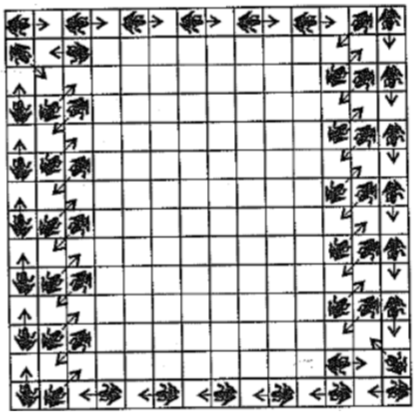
- Фиг. 1 дава пример за $n=4$. За всяко n, което се дели на 4 можем да разбием дъската на такива квадрати.
- На Фиг. 2 е показано как трябва да се действа за всяко нечетно число.
- Най-трудният случай е когато n дава остатък 2 при деление на 4. За $n=6$ използваме Фиг. 4.
- За всяко по-голямо от 6 число използваме моделът на Фиг. 3, като вътрешността запълваме с квадрати 4×4 от Фиг. 1.



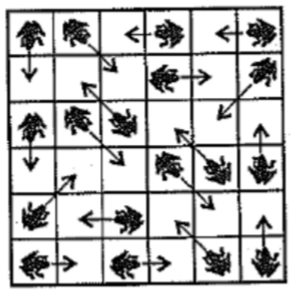
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$\square$

Решение на задача 5.

а) Прилагаме теоремата на Хол за множеството $\{1, \ldots, n\} = [n]$ и техните съседи $\Gamma([n])$ в B. Получаваме сдвояване M_n на $[n]$ в B. Да дазгледаме тази редица от частични сдвоявания на A. Тъй като всеки връх има краен брой съседи непременно съществуват безкрайно много от тези сдвоявания, в които 1 е сдвоен с точно определен свой съсед. Измежду тях има безкрайно много, в които 2 е сдвоен с точно определен свой съсед (различен от сдвоения с 1). Продължавайки по този начин получаваме сдвояване на A в B.

б) Да означим с M сдвояване на A в B и с M' сдвояване на B в A, каквито ни се гарантират от предната подточка. Да разгледаме (безкрайния) граф с върхове $A \cup B$ и ребра $M \cup M'$. Забелязваме, че всеки връх има степен 1 или 2, значи графът се състои от: крайни четни цикли; безкрайни пътеки с начало; двустранно безкрайни пътеки. Циклите можем да сдвоим използвайки всяко второ ребро (няма значение от кое започваме); еднопосочните пътеки сдвояваме, използвайки всяко второ ребро, започвайки от началото им; двупосочните пътеки сдвояваме, използвайки всяко второ ребро (няма значение от кое започваме). Така получаваме пълно сдвояване на A и B, което дава желаната биекция (образът на всеки връх е сдвоеният му). $\square$

Решение на задача 6. По първия въпрос, нека разгледаме правоъгълна решетка $2020 \times 2020\binom{2021}{2}$. Тъй като всяка вертикална линия съдържа 2021 точки, две от тези точки са едноцветни по принцип на Дирихле. Освен това, имаме $\binom{2021}{2}$ възможности за избора на (някоя двойка от) едноцветни точки, и 2020 възможности за цвят. По принцип на Дирихле има две вертикални линии с двойки едноцветни точки, които се намират на едни и същи двойки позиции и имат един и същи цвят. Те формират правоъгълник.

По втория въпрос, ще използваме теоремата на Ван Дер Варден. Разглеждаме $W(N_1, 2020)$ точки на равни разстояния върху права (където N_1 ще определим по-късно). По теоремата имаме N_1 едноцветни (БОО от цвят 1) в аритметична прогресия, и следователно също на равни разстояния. Построяваме равностранен триъгълник от една и съща страна на правата за всеки две съседни от тези точки. Ако някой от получените върхове е в цвят 1, сме готови. Иначе за $N_1 = W(N_2, 2019)$ имаме аритметична прогресия БОО в цвят 2. Ако повторим същата процедура, новополучените върхове ще се върхове на равностранен триъгълник спрямо съседни точки в цвят 2, както и спрямо точки на разстояние $a+1$ в цвят 1, където a е стъпката на аритметичната прогресия. Дефинирайки $N_2 = W(N_3, 2018)$, продължаваме по същия начин докато не останат цветове.

Бихме искали да отбележим, че доказателството, представено по време на лекцията, дава ограничение за $W(k,r)$ между $\text{Ackermann}(k+1, r)$ и $\text{Ackermann}(k+1, 5r)$. Тъй като N_1 е поне 2020 (всъщност много повече), можете да дадете на някоя програма да се опитва да смята $\text{Ackermann}(2020, 2020)$, за да добиете представа за колко голямо число става дума. $\square$