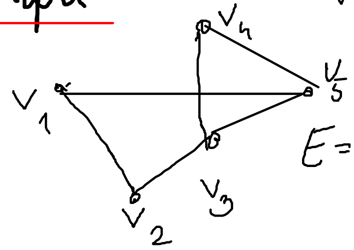
Екстремална теория на графите 1/2

1. Напомняния за графи

$G = (V, E)$ — V: върхове, E: ребра.

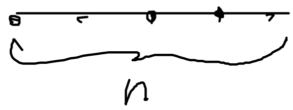


$V = \{v_1, \ldots, v_5\}$

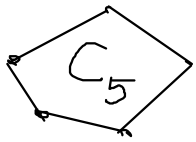
$E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots\}$

Степен на връх наричаме брой ребра излизащи (инцидентни) с дадения връх. $d_{v_2} = 2$

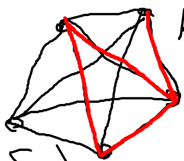
P_n е път с n върха



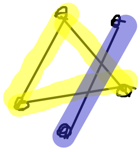
C_n е цикъл с n върха



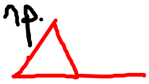
Пълният граф K_n на n върха е графът на n върха, в който присъстват всички ребра. ($\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ребра)



Граф наричаме свързан, ако между всеки два върха има път



Подграф H на граф G е граф $H = (V', E')$, за който $V' \subset V$, $E' \subset E$.

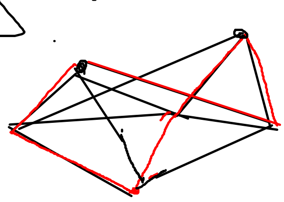
Напр.  е подграф на K_5

Клика наричаме подграф, който е пълен.

Минимална степен δ в граф е най-малката степен на връх в графа.

Зад 1. Колко къс може да е най-дългият цикъл в граф с минимална степен $\delta \geq 2$?

Пояснение. Фиксирано е число δ. Например $\delta = 3$. Сред всички графи с най-малка степен δ проверяваме колко дълъг е най-дългият цикъл.



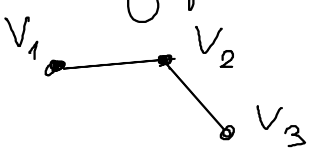
$\rightsquigarrow$ най-дългият цикъл има дължина 6.

Решение: Отг: $\delta + 1$.

Пример: $K_{\delta+1}$ – степента на всеки връх е δ, а най-дългият цикъл няма как да има дължина по-голяма от броя върхове в графа $(\delta + 1)$.

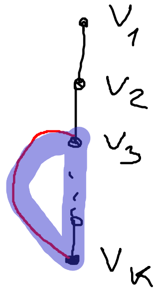
Доказателство, че всеки граф с минимална степен δ има цикъл с дължина поне $\delta + 1$.

Да започнем да "проучваме" графа, започвайки от произволно избран връх v_1. Тъй като v_1 има поне δ съседи, можем да изберем v_2 измежду тях.



Тъй като v_2 има поне δ съседи, можем да изберем v_3 измежду съседите, които са различни от v_1.

Продължаваме да намираме нови върхове, докато е възможно и така получаваме път $v_1, \dots, v_k$, за който v_k вече няма съседи различни от $v_1, \dots, v_{k-1}$.



Тъй като v_k има степен поне δ, той има поне δ съседи измежду $v_1, \dots, v_{k-1}$. Нека l е първият индекс, за който v_k е свързан с v_l. Тогава $v_l, v_{l+1}, \dots, v_k$ образуват цикъл с $k-l+1$ върха. Обаче $l \le k-\delta$, което дава желания цикъл. $\square$

Екстремална теория на графите

Колко най-голям (малък) може да е даден параметър на граф при ограничение върху графа?

Типичен пример.

$$ex(H, n) = \max\{|E(G)|,\ G \text{ има } n \text{ върха, но няма подграф } H\}$$

H – граф, n – ест. число

Зад.2 $ex(P_n, n) = ?$ Т.е. колко ребра трябва да има граф на n върха, за да сме сигурни, че има Хамилтонов път?

→ път минаващ точно по веднъж през всеки връх.

Пример

K_{n-1} $\bullet$ $\rightsquigarrow$ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Значи $ex(P_n, n) \ge \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Доказателство: след малко.

T1 (Оре'60). Ако G удовлетворява, че за всеки два върха $x, y \in V$ $d_x + d_y \ge n-1$, (*) където $n = |V|$, то G има Хамилтонов път.

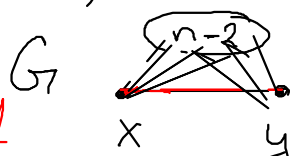
Доказателство на Зад 2. с T1.

Нека G е граф с n върха и строго повече от $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребра.

По Т.1. е достатъчно да докажем, че (*) е изпълнено.

Нека x и y са върхове на G.

Да забележим, че в G липсват най-много $\frac{n\cdot(n-1)}{2} - \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\right) = n-2$ ребра. Тогава



$d_x + d_y \ge (n-1) + (n-1) - (n-2) - 1 = n-1$, което решава задачата. □

T2 (Дирак'52) Всеки граф с n върха и минимална степен $\delta \ge \frac{n-1}{2}$ има Хамилтонов път.

Доказателство на T2, използвайки T1.

Да проверим (*). Всеки два върха x и y имат обща степен $d_x + d_y \ge \delta + \delta \ge n-1$. □

Следващия път: 1. Доказателство на Т1.

2. Ще търсим $ex(K_r, n)$.
т.е. колко най-много двойки хора измежду n могат да се познават без да има r от n-те, всеки двама от които се познават.

Жокери за Т. 1: Като в Зад 1., опитайте се да построите дълъг път, от който да извлечете цикъл.

Начало на доказателството на Т1.
Да забележим, че G е свързан. Действително, всеки два върха или са свързани с ребро (OK), или имат общ съсед (OK), защото има $n-2$ други върха и поне $n-1$ ребра от тези 2 върха към останалите $n-2$ (по принципа на Дирихле.)