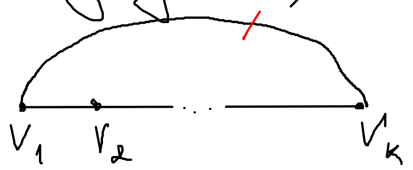
Екстремална теория на графите 2/2

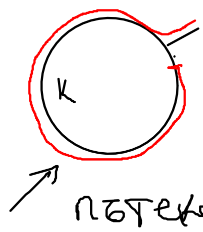
Т. (Оре) Ако G удовлетворява, че за всеки $x, y \in V$ $d_x + d_y \geq n-1$, (*) където $n = |V|$, то G има Хамилтонов път.

Доказателство: Нека G удовлетворява (*). Тогава G е свързан, т.к. всеки два върха или са съседни, или имат общ съсед.

Нека $v_1 \dots v_k$ е път с макс. дължина в G. Ако $k=n$ сме готови, така че допускаме, че $k<n$. По максималност v_1 и v_k нямат съседи извън $v_1, \dots, v_k$.

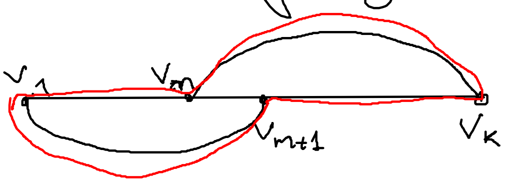


Да забележим, че ако $v_1 v_k$ е ребро, то имаме цикъл с k върха.



Т.к. G е свързан, от цикъла излиза ребро и получаваме пътека по-дълга от $v_1 \dots v_k$. Противоречие, откъдето v_1 не е свързан с v_k. Значи съседите на v_1 са измежду $v_2, \dots, v_{k-1}$ и същото за v_k.

Да забележим, че ако съществува $m \in \{2, 3, \dots, k-2\}$, за което $v_1 v_{m+1}$ и $v_k v_m$ са ребра, като по-горе имаме противоречие.



Знаем, че v_1 има $d_{v_1} - 1$ съседи измежду $v_3, \dots, v_{k-1}$ и v_k има $d_{v_k} - 1$ съседи измежду $v_2, \dots v_{k-2}$.

Но от (*) имаме, че $d_{v_1} - 1 + d_{v_k} - 1 \geq n-3 > k-3 = |\{v_2, \dots v_{k-2}\}|$. По Дирихле съществува желаното m и доказателството е завършено. □

Напомняне $ex(H,n) = \max\{|E(G)|,\ H \not\subseteq G,\ |V(G)| = n\}$.

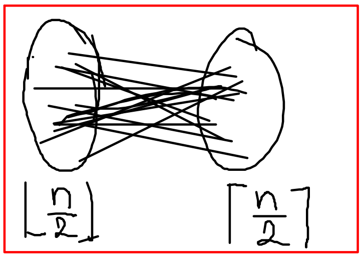
Дотук видяхме $ex(P_n, n)$, $ex(C_n, n)$, $ex(P_t, n)$

пълен n-цикъл

Сега ще разгледаме $ex(K_r, n)$

Зад. Предположете колко е $ex(K_3, n) = ex(\triangle, n)$

Пример $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$



$K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$

Т (Мантел) $ex(K_3, n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Док 1. Ако x и y са съседи в граф без $\triangle$, то те нямат общи съседи, т.е. $d_x + d_y \le n$. Оттук

$$|E| \cdot n \ge \sum_{xy \in E} (d_x + d_y) = \sum_{v \in V} d_v \cdot d_v = \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} d_v^2\right) \cdot n$$

$$\ge n \cdot \left(\frac{\sum_{v \in V} d_v}{n}\right)^2 = n \frac{(2|E|)^2}{n^2} = \frac{4|E|^2}{n}.$$

САСК

$$\sum_{v \in V} d_v = 2|E|$$

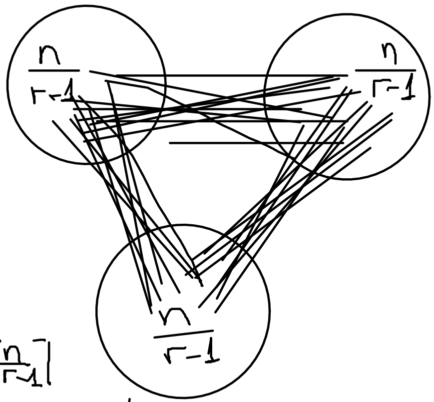
Значи $|E| \le \frac{n^2}{4}$ □

Док 2. По индукция ще допуснем, че сме доказали теоремата за $n-2$ и искаме да я докажем за n. Нека G е граф без $\triangle$ с n върха и xy е негово ребро. Махаме върховете x и y. Тогава получаваме граф G' с $n-2$ върха без $\triangle$.

Но $d_x + d_y \le n$, значи $|E(G')| = |E(G)| - d_x - d_y + 1 \ge |E(G)| - n + 1$ $\square$

<u>Упр.</u> $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - n + 1 = \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor$.

<u>Зад.</u> Отгатнете $ex(K_r, n)$.



<u>Пример:</u> Поне за $r-1 \mid n$

$$\left(\frac{n}{r-1}\right)^2 \cdot \binom{r-1}{2} = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{r-2}{r-1}$$

$$K_{\frac{n}{r-1}, \dots, \frac{n}{r-1}}$$

$$T_r(n) = K_{\lfloor \frac{n}{r-1} \rfloor, \dots \lfloor \frac{n}{r-1} \rfloor, \lceil \frac{n}{r-1} \rceil, \dots, \lceil \frac{n}{r-1} \rceil}$$

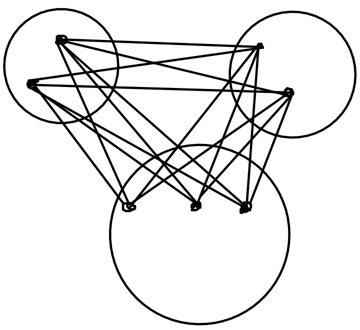
граф на Туран

<u>Т. (Туран)</u> $ex(K_{r+1}, n) = |E(T_r(n))|$ и $T_r(n)$ е единственият граф постигащ равенство

<u>Идея за доказателство.</u> Докажете го по индукция, използвайте, че измежду графите с n върха и толкова ребра колкото има $T_r(n)$ той има най-висока мин. степен. Махнете връх от мин. степен.

<u>Т (Ердьош–Стоун '46)</u>

$$ex(H, n) \approx \frac{n^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right) \approx |E(T_{\chi(H)}(n))|$$



$$\frac{7}{3} \in (2, 3)$$