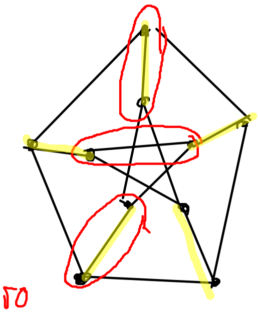
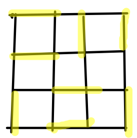
Сдвоявания 1/3

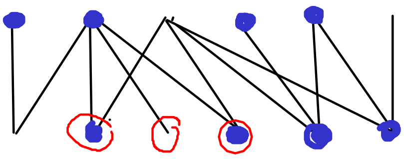


Сдвояване на граф $G=(V,E)$ е подмножество на ребрата, такова че всеки връх участва в най-много едно ребро.

Сдвояване наричаме **пълно**, ако всеки връх участва в точно едно ребро.



Ще бележим с $\nu(G) = \max\limits_{M - \text{сдвояване на } G} |M|$.



Покриване на граф G е подмножество $S \subset V$, такова че всяко ребро $e \in E$ изпълнява $e \cap S \neq \emptyset$.

Бележим с $\tau(G) = \min\limits_{S - \text{покриване на } G} |S|$.

Зад 1. Докажете, че за всеки граф G е изпълнено $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$, където $\alpha(G)$ е най-големият брой върхове без ребра между тях.

Решение: Нека S е минимално покриване. Тогава няма ребра от $V \setminus S$ към $V \setminus S$. Значи

$$\alpha \geq |V| - \tau.$$

Нека S' е максимално множество от върхове без ребра между тях. Тогава $V \setminus S'$ е покриване. Значи $\tau \leq |V| - \alpha$. $\square$

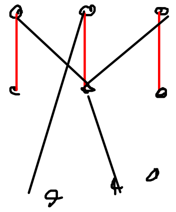
Зад 2. Докажете, че за всеки граф G имаме

$$\nu(G) \leq \tau(G).$$

най-голямо сдвояване

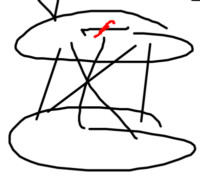
най-малко покриване

Решение: Нека M е сдвояване на G.



Всяко покриване съдържа поне един връх от всяко от ребрата на сдвояването. $\square$

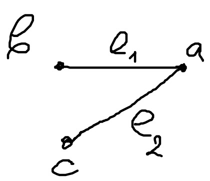
Един граф е <u>двуделен</u>, ако можем да разделим върховете му на 2 групи без ребра вътре в групите.



<u>Т(Кьониг '31)</u> За двуделен граф е изпълнено $\nu(G) = \tau(G)$.

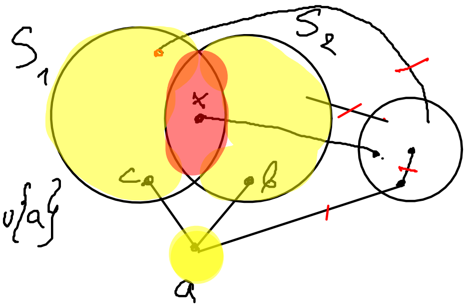
Доказателство: От Зад. 2 е достатъчно да докажем, че $\tau \le \nu(G)$ за двуделни графи. Нека G е контрапример.
Да махаме ребра от G в произволен ред, но без да променяме τ. Нека G' е така полученият граф, от който не можем да махаме повече ребра без да променим τ.
Ясно е, че е достатъчно да докажем, че $\tau(G') \le \nu(G')$.

<u>Да допуснем, че съществува връх a от степен поне 2 в G'.</u>



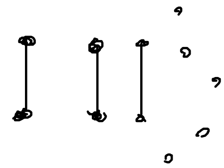
Знаем, че ако махнем реброто e_1 имаме $\tau(G' \setminus e_1) < \tau(G) = \tau(G')$. Значи има покриване S_1 на $G' \setminus e_1$ с $|S_1| = \tau(G') - 1$ и a и b не са в S_1.
Подобно имаме покриване S_2 на $G' \setminus e_2$ с $|S_2| = \tau(G') - 1$ върха и a и c не са в S_2.

Да разгледаме подграфа G'' на G' индуциран от $(S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1) \cup \{a\}$



Да забележим, че G'' има $2(\tau(G') - 1 - x) + 1$ върха, където $x = |S_1 \cap S_2|$. Но G'' е двуделен, значи по-малкият от двата му дяла е покриване с най-много $\tau(G') - 1 - x$ върха. Добавяйки към такова покриване всички върхове от $S_1 \cap S_2$ получаваме покриване на G' с $\tau(G') - 1$ върха, противоречие.

Тогава G' няма връх със степен 2 или повече, в който случай очевидно $\tau(G') = \nu(G')$ $\square$



Т. (Хол '35) Бележим с

$\Gamma(C) = \{x \in V(G),\ \exists c \in C,\ x \text{ е съседна } c\}$

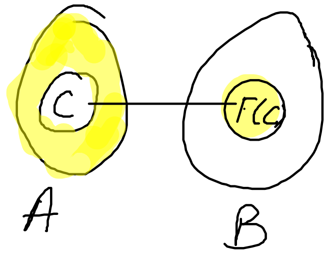
за $C \subset V(G)$.

За всеки двуделен граф с дялове A и B имаме сдвояване на A в B (т.е. всеки връх от A участва в ребро от сдвояването) т.и.с.т.к. $|\Gamma(C)| \geq |C|$ за всяко $C \subset A$ (*)

Зад 3. Докажете Т. на Хол, ползвайки Т. на Кьониг.

Решение: Ако съществува $C \subseteq A$: $|C| > |\Gamma(C)|$, то сдвояване на A в B няма по пр. на Дирихле.

Да допуснем, че (*) е изпълнено. Тогава $|\Gamma(C)| + |A \setminus C| \geq |A|$ за всяко C. Т.е. всяко покриване $A \setminus C \cup \Gamma(C)$ има най-малко A върха.



Значи $\nu(G) \geq |A|$ по Т. на Кьониг и оттам имаме сдвояване на A в B. $\square$

Т (Фробениус 1917) Двуделен граф с равни дялове имаме пълно сдвояване т.и с.т.к. $|\Gamma(C)| \geq |C|$ за всяко $C \subset A$. (*)

Доказателство: Следва от Хол.

Лекция 2 Приложения в оцветяванията на графи, латинските квадрати, системи различни представители и др.

Лекция 3: • Как да намерим пълно сдвояв., ако такова съществува?

• Стабилна сдвоявания. (Как да изберем такова бракосъчетание, че да няма разводи?)