Сдвоявания 2/3

В предишния епизод видяхме

Т2 (Хол) Двуделен граф с дялове A, B има сдвояване на A в B т.и.с.т.к.
$$\forall C \subseteq A \quad |\Gamma(C)| \geq |C| \qquad (*)$$

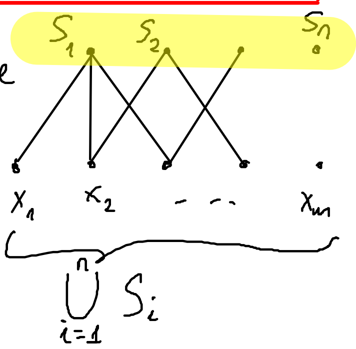
Приложения

1. Системи различни представители (СРП)

Дадени са множества $S_1, \dots, S_n$ и търсим СРП: елементи $s_1, \dots, s_n$ – различни, за които $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$.

Т4 (Хол) Дадена е система от множества $S_1, \dots, S_n$. Има СРП т.и.с.т.к. $\boxed{\text{за всяко } k \leq n \text{ и всеки } k \text{ множества (измежду } S_1, \dots, S_n) \text{ тяхното обединение съдържа поне } k \text{ елемента.}}$ $(\Diamond)$

Доказателство: Да разгледаме графа с върхове $S_1, \dots, S_n$ и елементите на $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$.



Ребро поставяме само между елемент x и множество S, ако $x \in S$.

Да приложим Т2 за този двуделен граф. Действително СРП е точно сдвояване не дела на множествата в този на елементите. Лесно виждаме, че $(*)$ и $(\Diamond)$ са еквивалентни. $\square$

Зад. Тесте карти е наредено в четири реда по 13 карти. Да се докаже, че може да се избере по 1 карта от колона така, че да сме избрали 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.

Решение: Разглеждаме множествата от видове карти във всяка колона. Търсим СРП. За целта проверяваме ($\diamondsuit$). По броене по 2 начина имаме, че всеки k колони имат поне $\frac{4k}{4} = k$ различни вида карти

брой карти в колоните

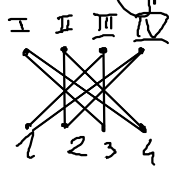
брой карти от даден тип.

По Т4: готово. $\square$

Зад. Да се докаже, че ако са попълнени първите k реда от латински квадрат (правилно), то можем да попълним квадрата правилно.

I	II	III	IV
1	3	2	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	2	3	1

$\longleftrightarrow$



Решение: По индукция стига да допълним 1 ред. Да приложим Т4 за множествата от липсващи числа във всеки стълб.

Ако сме попълнили k от n реда, то в l колони има общо $l.(n-k)$ липсващи числа броени с кратност. Но всяко число липсва в точно $n-k$ стълб. Оттук има поне $\frac{l.(n-k)}{n-k} = l$ различни свободни числа за тези l колони. По Т4 сме готови $\square$

2. Многожество

Граф наричаме **регулярен**, ако всички върхове имат равни степени.

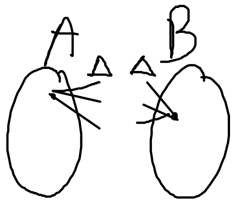
Оцветяване на ребрата на граф наричаме **правилно**, ако всеки две едноцветни ребра нямат общ връх.

Хроматичен индекс на граф $\chi_e(G)$ наричаме най-малкия брой цветове необходими за правилно оцветяване на G.

T5 (Визинг) За всеки граф G
$\chi_e(G) \in \{\Delta, \Delta+1\}$, където Δ е най-високата степен на връх в G.

Доказателство: лекцията на Б.С. за оцветяване на графи.

T6. Всеки двуделен регулярен граф има пълно сдвояване.



Доказателство: Да забележим, че деловете са равни. От A излизат $|A|.\Delta$ ребра, а в B влизат $|B|.\Delta$. Обаче това са същите ребра, значи $|A|=|B|$. Подобно, ако $C \subset A$, то

$$|\Gamma(C)| \geq \frac{\underbrace{|C|.\Delta}_{\text{брой ребра от } C}}{\underbrace{\Delta}_{\text{макс. степен на върховете в } B.}} = |C|.$$

Приключваме по T3 (Фробениус). $\square$

Зад. За всеки граф $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$.

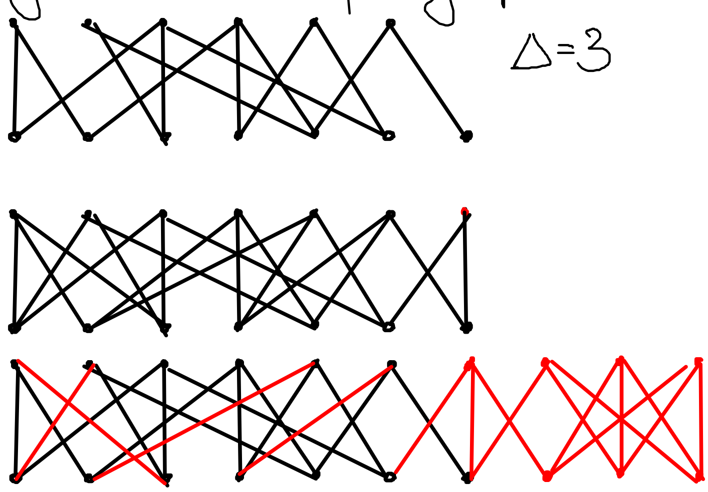
Решение: Да разгледаме връх със степен $\Delta(G)$. Всички ребра инцидентни с него са разноцветни в правилно оцветяване, така че $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ $\square$.

Задача За всеки двуделен регулярен граф $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

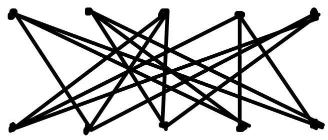
Решение: От предната задача е достатъчно да оцветим графа правилно в Δ цвята. От Т6 имаме сдвояване. Оцветяваме го в цвят 1, махаме тези ребра от графа и повтаряме това Δ пъти с разл. цветове. Тъй като ребрата от вс. цвят образуват сдвояване, оцветяването е правилно. $\square$

Т7 (Кьониг) За всеки двуделен граф $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

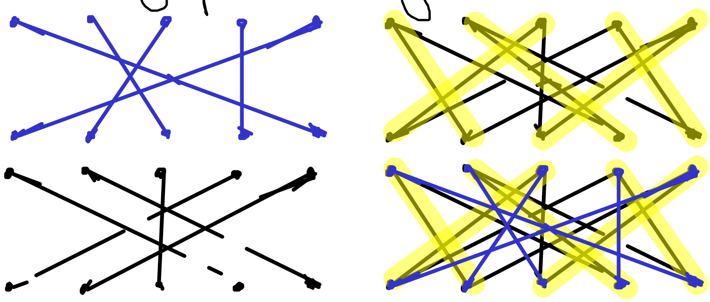
Доказателство: Да си допълним графа, докато стане регулярен от степен Δ.



Упражнение. Докажете, че можем да достигнем до регулярен двуделен граф от степен Δ.



За така получения граф прилагаме предната задача и изтриваме добавените върхове и ребра.



Следващия път ще видим как да намираме сдвоявания.

Латински квадрат

	A	B	C	D
I	1	2	3	4
II	4	3	1	2
III	3	4	2	1
IV	2	1	4	3