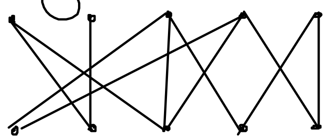
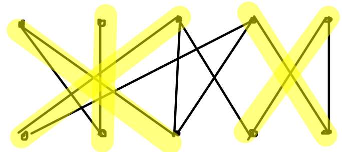
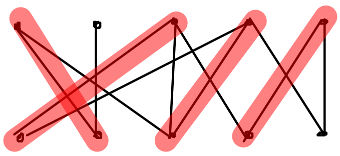
Сдвоявания 3/3

1. Как да се оженим на практика?

Нека G е двуделен граф, който има пълно сдвояване.



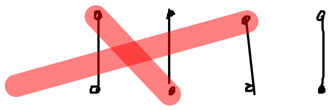


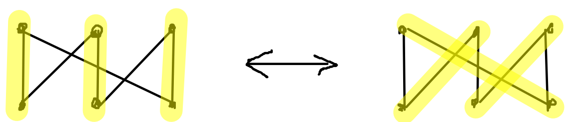


Лаком алгоритъм: сдвояваме всеки несдвоен връх с първия възможен, ако има такъв.

Зад. Докажете, че лакомият алгоритъм намира сдвояване на поне половината върхове на граф с пълно сдвояване.

Решение: Щом има пълно сдвояване, няма как два върха сдвоени в пълното сдвояване да са несдвоени от алгоритъма, понеже когато той стигне до единия от тях, ще го сдвои. Значи поне по 1 връх от всяко ребро в пълното сдвояване е сдвоен от алгоритъма, а те са $\frac{|V|}{2}$. □

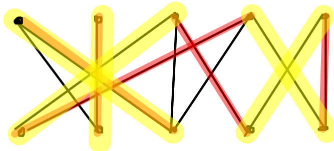


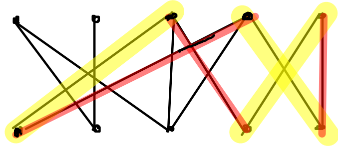


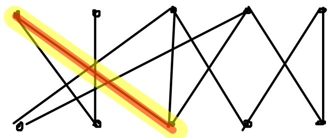
обръщане на (четен) цикъл

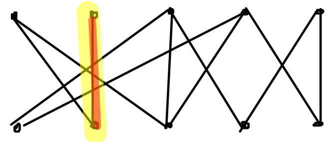
Зад. Да се докаже, че от всяко пълно сдвояване можем да стигнем до всяко друго с обръщания на цикли.

Решение: Да насложим две пълни сдвоявания.



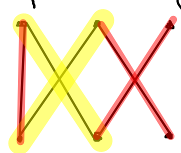






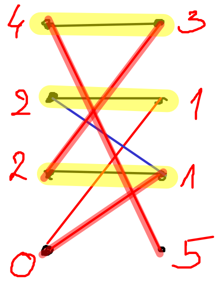
Забелязваме, че образуваният от тях граф се състои от съвпадащи ребра и редуващи цикли. Обръщайки всеки цикъл минаваме от едното в другото сдвояване. □

Т. (Берж '57) Ако сдвояване M в граф имащ пълно такова няма увеличаваща пътека, то сдвояването е пълно.



Доказателство: Да разгледаме графа образуван от пълно сдвояване и M. Ако M не е пълно, то има връх v несдвоен в M. Минаваме по реброто от v в пълното сдвояване, връщаме се по M и т.н., докато не стигнем друг не сдвоен в M връх. □

Унгарски алгоритъм.



Започваме от несдвоен връх в дадено (не пълно) сдвояване. Разглеждаме ребрата от 0 към други върхове. Ако има несдвоен измежду тях сме OK. Кръщаваме тези върхове с 1 и с 2 сдвоените им. Сега продължаваме със съседите на върховете 2, които не са измежду вече разгледаните. Спираме, когато стигнем до друг несдвоен връх. Ако това се случи, сме намерили увеличаващата пътека.

Да допуснем, че не стигаме до несдвоен връх. Тогава забелязваме, че върховете с нечетни номера в полученото дърво са по-малко от тези с четни, понеже всички нечетни са сдвоени с четни, а 0 не е сдвоен. Това ни дава (по Фробениус), че пълно сдвояване няма □

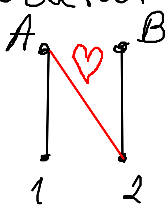
Бележка:

- Алгоритъмът е бърз $\cancel{\binom{|V|}{2}}$
- Ако няма п. сдвояване, алгоритъмът намира множество C от върхове, което показва, че пълно сдвояване няма.

2. Стабилни сдвоявания

Имаме n момчета и n момичета. Всички се познават. Искаме да ги ожени по двойки. Обаче всяко момче има своя подредба на предпочитания на момичетата и обратното.

Едно сдвояване е стабилно, ако няма момче и момиче, които се предпочитат взаимно пред партньорите си.



Алгоритъм на Гейл-Шапли.

Т. Съществува стабилно сдвояване и то може да се намери по следния начин.

Организираме рундове. На всеки рунд всяко момче предлага брак на най-желаното от него момиче, което още не му е отказало. На края на рунда всяко момиче се сгодява с най-харесваното от него момче, от което има предложение, като, ако е необходимо разтрогва досегашния си годеж. Приключваме, когато вече никой не отказва на никого. Сватосваме по получения начин.

Доказателство: Момчетата предлагат само по веднъж на всяко момиче, значи след краен брой рундове нещата се стабилизират. Годеничките на момчетата само се влошават, а на момичетата — само се подобряват. Всяко момче е получило отказ от всички момичета по-добри от годеницата му, а те, за да са му отказали, са имали по-добър годеник. Значи и в крайното сдвояване все още всяко от тези момичета предпочита годеника си пред въпросното момче. Значи сдвояването е стабилно.

Упражнение: Така полученото сдвояване е най-доброто възможно за всяко едно момче и най-лошото възможно за всяко момиче.