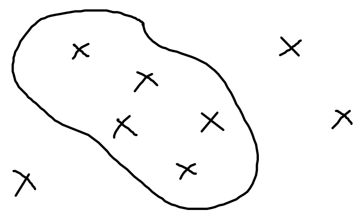
Системи от множества 1/2

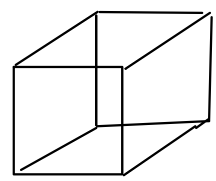
Множество е нещо снабдено с понятие за съдържане.



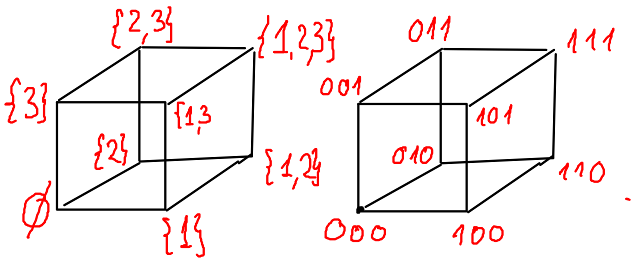
Ние ще се интересуваме от крайни множ., чиито елементи ще са БОО естествени числа.
Бележим с $[n] = \{1,\dots,n\}$, а $\mathcal{P}(n)$ или $2^{[n]}$ бележат множеството от всички подмножества на $[n]$, т.е. всички множества с елементи измежду $1,2,\dots,n$.

$|2^{[n]}| = 2^n$. Също бележим $2^{[n]}$ с Q_n.

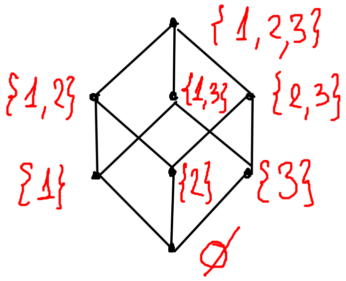
Защо наричаме Q_n хиперкуб?



$\{1,3\}\subset[3] \rightsquigarrow (1,0,1)$



По-абстрактно, Q_n е граф с върхове подмножествата на $[n]$, в който ребра има между множествата различаващи се в един елемент, т.е. $|A \Delta B| = |(A\setminus B)\cup(B\setminus A)| = 1$.



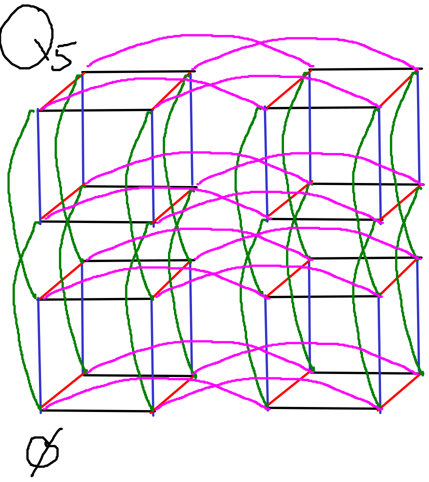
$\longrightarrow |A| = 3$

$\longrightarrow |A| = 2$

$\longrightarrow |A| = 1$

$\longrightarrow |A| = 0$.

За множество A означаваме с $|A|$ броя елементи на A и го наричаме кардинал, големина...

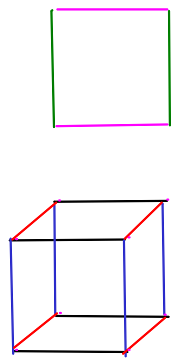


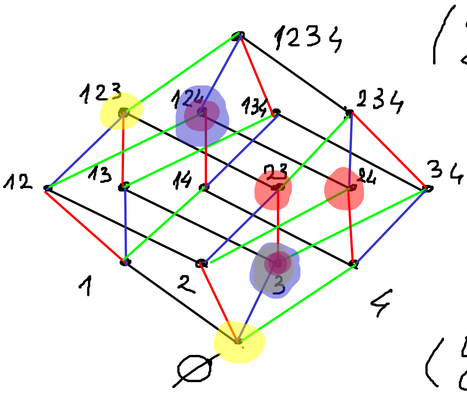
5 $\times 2^4$

3 $\times 2^4$ 4 $\times 2^4$

2 $\times 2^4$

1 $\times 2^4$





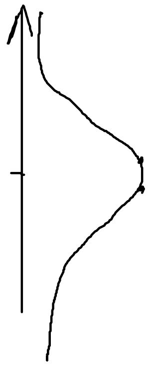
$\binom{4}{4}$

$\binom{4}{3}$

$\binom{4}{2}$

$\binom{4}{1}$

$\binom{4}{0}$



$Q_n = Q_{n-1} \times Q_1 = Q_{n-k} \times Q_k$.

Индукция

Всеки връх има n ребра (по 1 от всеки цвят.

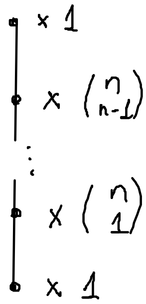
$Q_n = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}$

к-то ниво или слой

$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \binom{n}{k}$

Всеки връх в ниво к има n-к ребра нагоре и к надолу.

Графът прилича на:



Това представяне се държи добре спрямо ⊃

Казваме, че две множества A, B са сравними, ако $A \supset B$ или $B \supset A$.

Наричаме система от множества подмножество на $\mathcal{P}([n])$.

Наричаме <u>верига</u> система от множества, които са две-по-две сравними.

Наричаме <u>анти-верига</u> система от множества, никои две от които не са сравними.

<u>Зад.</u> Колко голяма може да е верига в Q_n?

<u>Решение:</u> <u>Пример</u> за $n+1$: $\{\emptyset, [1], [2], \ldots, [n]\}$

<u>Доказателство:</u> Забелязваме, че верига не може да има две свои множества в един слой. Значи веригата има не повече от $n+1$ (броя слоеве) множества. $\square$

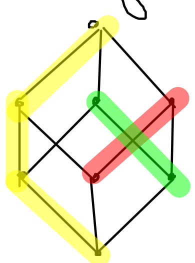
Колко голяма може да бъде анти-верига в Q_n?

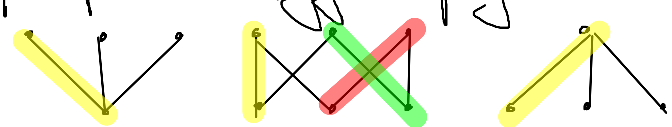
<u>Лема на Шпернер</u> Най-голямата анти-верига в Q_n съдържа $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ множества.

<u>Доказателство:</u> <u>Пример</u>: Средният (средните) слой има толкова елемента.

<u>Идея:</u> Да покрием Q_n с $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ на брой вериги, което е достатъчно, защото верига и анти-верига не могат да имат два общи елемента.

Да забележим, че можем да построим веригите, гледайки ребрата между поредни слоеве отделно.





Значи е достатъчно да сдвоим всеки слой с номер $k < \frac{n}{2}$ със слоя $k+1$.

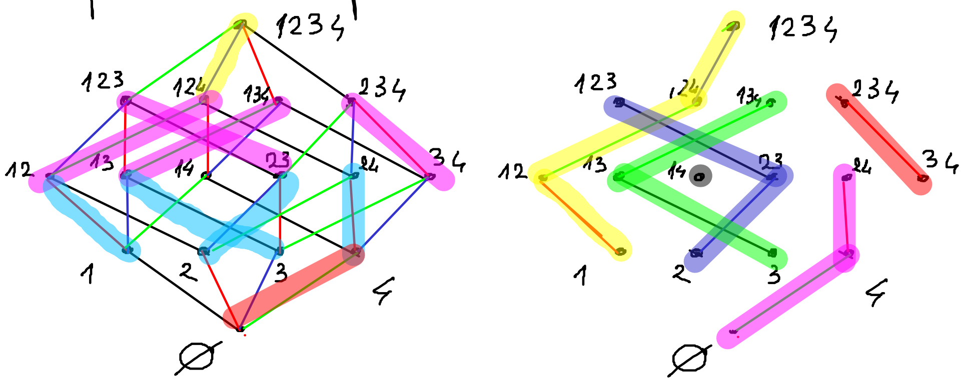
Т (Хол) Даден е двуделен граф с дялове A и B. Има сдвояване на A в B т.и.с.т.к. за всяко $C \subset A$ имаме $|\Gamma(C)| \geq |C|$. (*)

Доказателства: Сдвоявания 1/3. $\square$

Проверяваме (*). Нека $C \subset \binom{[n]}{k}$ с $k < \frac{n}{2}$.

Тогава $|\Gamma_{k+1}(C)| \geq \frac{|C|.(n-k)}{k+1} \geq |C|$.

Съединявайки сдвояванията получаваме търсените вериги $\square$



Следващата лекция ще говорим за изопериметрични неравенства в Q_n.