

Системи от множества 1/2

Ивайло Харгарски

19 август 2020г.

Упражнение 1 Колко на брой са максималните (тези, които не се съдържат в по-голяма верига) вериги в n -мерния хиперкуб Q_n ?

Упражнение 2 (*) Сянка на система от множества $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ наричаме

$$\partial\mathcal{A} = \left\{ B \in \binom{[n]}{k-1}, \exists A \in \mathcal{A}, B \subset A \right\}.$$

1. Докажете, че за всяка система от множества $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ е изпълнено

$$\frac{|\partial\mathcal{A}|}{\binom{n}{k-1}} \geq \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{k}}.$$

2. Докажете, че за всяка антиверига $\mathcal{A} \subset Q_n$ е изпълнено

$$\sum_{k=0}^n \frac{|\mathcal{A} \cap \binom{[n]}{k}|}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

3. Докажете лемата на Шпернер без да използвате теоремата на Хол и докажете, че в нея равенство се достига само ако анти-веригата е среден слой (един от двата, ако n е нечетно).

Упражнение 3 (*) Колко голяма може да бъде система от множества, която не съдържа верига с големина 3?