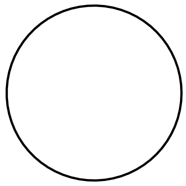
Системи от множества 2/2

Изопериметрични неравенства.

В равнината най-малък периметър има кръгът измежду фигурите с равно лице.



В граф G ще търсим $S \subset V$ с малка повърхност при даден обем.

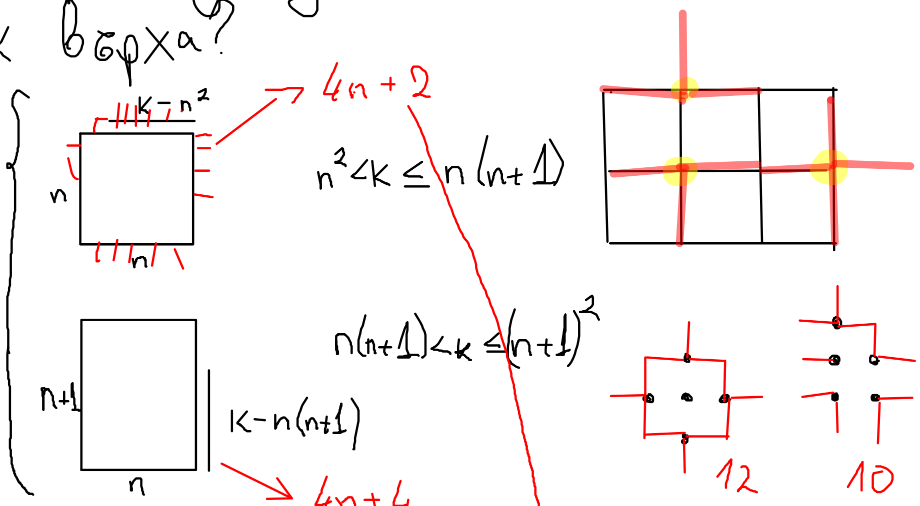
Обем: $|S|$.

Повърхност: $\partial_v S = |\Gamma(S) \setminus S|$

$$\partial_e S = |\{\{x,y\} \in E(G),\ x \in S,\ y \notin S\}|$$

Зад. Имаме k върха в $\mathbb{Z}^2$. Колко най-малко ребра излизат от множеството от тези k върха?

Пример



Доказателство, че $\partial_e S \ge$

Забелязваме, че $\partial_e S \ge 2(\pi_1 + \pi_2)$, а $|S| \le \pi_1 \cdot \pi_2$,

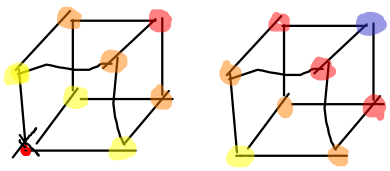
бр. редове бр. стълбове

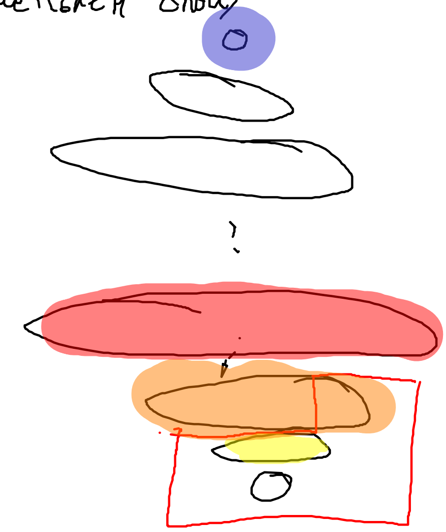
значи по САСГ $\partial_e S \ge 4\lceil\sqrt{|S|}\rceil$ (ОК за II случай, подобно за първия).

? Как изглежда минимизатор в Q_n?

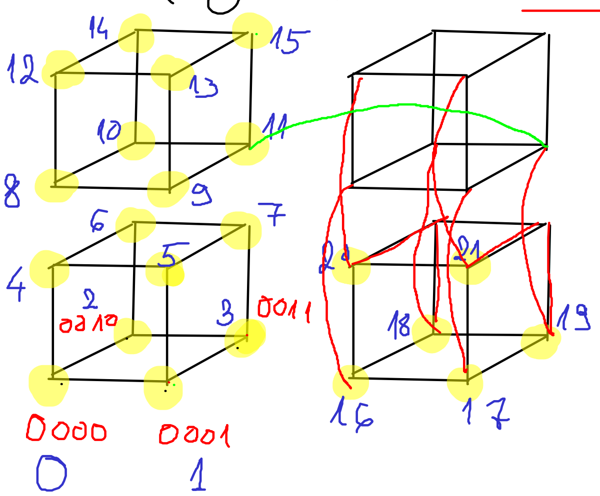
Т (Харпър) За ∂_v най-доброто множество в Q_n е топка на Хаминг, т.е. първите няколко слоя (плюс един непълен слой)

Док. Сходно с долното, но малко по-неприятно.





Т. Оптимално изопериметрично множество в Q_n за ∂_e е начален сегмент на бинарния (лексикографски ред)



Бин. ред: Редът на $\mathbb{N}$ в двоичен запис.

Компресия: Действие запазващо обема, но намаляващо повърхността.

Да разгледаме компресията по посока $i \in [n]$ състояща се от това да заменим $\mathcal{A}$ с $\boxed{\mathcal{A}_0^i}$ $\boxed{\mathcal{A}_1^i}$

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0'^{i} \cup \mathcal{A}_1'^{i}$, където $\mathcal{A}_0'^{i}$ е оптималното множество в Q_{n-1} с $|\mathcal{A}_0^i|$, където

$\mathcal{A}_0^i = \{A \in \mathcal{A},\ i \notin A\}$

Да забележим, че

$$\partial_e {}'\mathcal{A}^i = \partial_e^{n-1} {}'\mathcal{A}_0^i + \partial_e^{n-1} {}'\mathcal{A}_1^i + |{}'\mathcal{A}_0^i \triangle {}'\mathcal{A}_1^i|$$

$$= \big||{}'\mathcal{A}_0^i| - |{}'\mathcal{A}_1^i|\big| = \big||\mathcal{A}_0^i| - |\mathcal{A}_1^i|\big|$$

Тоест $\partial_e {}'\mathcal{A}^i \le \partial_e^{n-1} \mathcal{A}_0^i + \partial_e^{n-1} \mathcal{A}_1^i + |\mathcal{A}_0^i \triangle \mathcal{A}_1^i|$

$= \partial_e \mathcal{A}^i$.

Значи операцията намалява повърхнината.

Да забележим, че след краен брой компресии стигаме до множество, което не се променя при компресия.

Упр. Защо? Проверете, че сумата от $\sum_{A \in \mathcal{A}} A$ намалява строго, ако множеството се

бинарен запис на ест. число

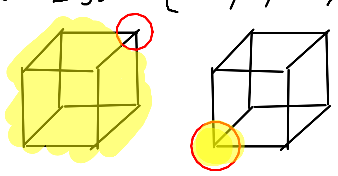
промени.

Остава да анализираме системите от множ., които са компресирани във всички направления.

Упр. Началните сегменти на бинарния ред са компресирани. Също така и

$\mathcal{B} = (\mathcal{P}([n-1]) \cup \{\{n\}\}) \setminus \{\{1, 2, \dots, n-1\}\}$

Но $\partial_e^n \mathcal{B} > \partial_e^n Q_{n-1}$



Доказателство, че $\mathcal{B}$ е единствената компресирана система от множества, която не е начален сегмент на бинарния ред.

Нека $\mathcal{A}$ е компресирана сист. от множ. и $A <_{bin} B$, където $A \notin \mathcal{A} \ni B$.

Тогава за всяко $i \in [n]$, $i \in A \Delta B$, откъдето $A = [n] \setminus B$. Значи има само една такава двойка A, B. Но $B =_{bin} 2^n - 1 - A \geq 2^{n-1}$, значи $Q_{n-1} \setminus \{A\} \subset \mathcal{A}$.

Оттук $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, което приключва доказателството $\square$