Красотата е симетрия

Зад 1. На дъската е записано числото 11. Ани и Боби се редуват; първа е Ани. Който е на ход, увеличава цифрата на единиците или на десетиците на числото на дъската, така че новото число отново да е двуцифрено. Който напише 99, печели. Кой ще спечели при правилна игра?

Зад 2. Дадена е кръгла маса и достатъчно количество еднакви монети. Двама играят следната игра: Който е на ход взима една монета и я слага на масата. Който не може да играе губи. Кой печели при правилна игра?

Решение: Първият играе в центъра и после симетрично.

Зад 3. Дадена е таблица 9×9. Ани и Боби се редуват; първа е Ани. Който е на ход, записва буквата си в някое празно поле. Когато се запълнят всички полѐта, Ани печели по 1 точка за всеки ред и за всеки стълб, в който има повече букви „А”, а Боби печели по 1 точка за всеки ред и за всеки стълб, в който има повече букви „Б”. Кой ще събере повече точки при правилна игра?

Решение: Отначало Ани слага „А” в централното поле, а при всеки следващ ход слага „А” си в поле, симетрично[1] на полето, в което Боби е поставил „Б”. Така в края Ани печели точките за средния ред и средния стълб, а останалите точки са поравно (ако един спечели някой от останалите редове и стълбове, другият печели симетричния относно центъра).

Зад 4. Квадрат 9×9 е разделен на бели полета 1×1. Двама играчи последователно оцветяват едно неоцветено или две съседни неоцветени полета. Който не може да играе, губи. Кой ще спечели при правилна игра?

Решение: Ще победи първият при следната стратегия: отначало оцветява централния квадрат 1×1 и после отговаря на на ходовете на втория симетрично относно центъра.

Зад 5. Двама играчи последователно чертаят диагонали в изпъкнал 2016-ъгълник, като не е разрешено диагоналът да има общи точки с вече начертани диагонали. Който не може да играе, губи. Кой ще спечели при правилна игра?

Решение: Печели първият, стига при първия си ход да прекара един от най-дългите диагонали и после да играе симетрично на втория.

Зад 6. На шахматна дъска е поставен пул. Двама души се редуват да играят с пула, като на своя ход всеки трябва да го премести на разстояние, строго по-голямо от разстоянието, на което го е преместил другият на последния си ход. Пулът винаги трябва да е точно в центъра на някое поле. Който не може да играе губи. Кой печели при правилна игра?

Решение: Ще докажем, че първият може да спечели като винаги мести пула на диаметрално противоположното поле, спрямо центъра на дъската. На първия ход е ясно, че той може да направи това. Ще докажем по индукция, че и на всеки от следващите ходове може да постигне това. Да кажем, че след последния си ход първия е оставил пула на разстояние r от центъра да дъската. Сега на своя ход вторият трябва задължително да играе по-далеч от центъра, отколкото първият го е оставил. Тоест първият винаги има ход, а разстоянието от центъра се увеличава. Защо дистанцията, измината от първия е по-голяма от последния ход на втория можем да докажем с неравенството на триъгълника.

Разграфяване

Зад 6. В едно от полетата на дъска 8×8 е поставен пул. Ани и Боби играят; Ани е първа. На всеки ход играчът премества пула в съседно по страна поле, в което не е бил по-рано. Който не може да играе, губи.

a) Кой ще спечели при правилна игра?
b) Променя ли се играта ако можем да се движим по диагонал?
c) Променя ли се играта ако дъската е 9x9?
d) Променя ли се играта ако дъската е 9x9 и можем да се движим по диагонал?

Решение: а) Ани мислено разделя дъската на домина 2×1. Ако пулът е в едното от двете полѐта на дадено домино, Ани го премества в другото. Това гарантира всеки неин ход. Понеже играта завършва, Ани печели.

b) Не, стратегията от а) работи отново.

c) Да и то съществено. Нека оцветим дъската шахматно и черните полета да за повече. Ако пулът е на черно поле, то Боби може да приложи стратегията на Ани от а) като изпусне началното поле на пула и по този начин да спечели. Ако пулът е на бяло поле, то Ани играе в някое черно поле, след което разграфява остатъка от дъската на домина, като едно черно поле остава извън тези домина. Ани продължава да следва стратегията си от а), като понеже тя е човекът, който слага пулът в черните полета, то Боби никога няма да може да сложи пулът в черното поле, което не е разграфено и стратегията на Ани ще сработи.

d) Лесно се доказва (хаха), че можем да разграфим таблицата на домина 2x1 и едно ъглово домино (две полета, съседни по връх, но не и по страна). По този начин стратегията на Ани от а) може да бъде приложена от Боби, който печели.

Инвариант:

Зад 7. В купчина има 31 камъка. Рей и Люк играят следната игра: Който е на ход разделя всяка от съществуващите купчинки, в която има повече от 1 камък на две части (не е нужно да са равни). Който успее след хода си направи всички купчинки с по 1 камък печели. Ако Рей започва, кой печели при правилна игра?

Решение: Забележете, че ако най-голямата купчинка е с 2^n-1 камъка, то след ход най-голямата купчинка ще е с повече от 2^(n-1)-1 камъка. Тоест вторият използва стратегията да оставя след хода си в най-голямата купчина 2^k-1 камъка (той може да направи това, защото първият след хода си е оставил в най-голямата купчина не повече от 2^n-2 камъка, която може да се раздели на 2 купчини по 2^(n-1)-1) камъка). От разсъжденията по-горе първия не може да остави след хода си същото. Съответно се стига до момент в който втория оставя след хода си в най-голямата купчина 2^1-1=1 камъка и печели.

ЗАБЕЛЕЖКА: Задачата може да се даде за 2 или даже за 3 ниво, ако 31 в условието се замени с n. Тогава решението е, че за степените на двойката минус 1 печели Люк, а за останалите печели Рей, която след първия си ход оставя в най-голямата купчина 2^k-1 камъка.

Зад 8. На маса има 10 купчинки със съответно 1,2,3,…,10 ореха. Двама играчи се редуват да взимат по 1 орех от някоя купчинка. Играта свършва когато останат 3 ореха, като ако са в 3 различни купчинки печели вторият, а в противен случай печели първият. Кой ще спечели при правилна игра?

Решение: Първият ще взима купчина с един орех винаги, когато такава има и никога няма да взима от купчина с 2 ореха. Той винаги може да направи това, понеже преди неговият ход всички орехи на масата са нечетен брой. Прилагайки тази стратегия на първият си ход той взима единият орех, а по-нататък никога не може да се образува повече от една купчинка с един орех, следователно той ще спечели.

Зад 9. Двама пирати – Бил и Джон, имали по 74 златни монети. Те решили да играят следната игра: Един след друг те слагат на масата 1,2 или 3 монети. Печели този, който сложи стотната монета. Ако Бил е първи, кой печели при правилна игра?

Решение: Принципно ако монетите бяха неограничени, Джон би спечелил като допълва монетите на Бил до число, кратно на 4. Но в случая при тази стратегия ако Бил слага по 1 монета, а Джон трябва да слага по 3, на последният си ход Джон ще сложи 2 монети и Бил ще спечели. Нека разгледаме вариантите. Ако на първият си ход Бил е играл 2 или 3 монети, то Джон може да икономиса една монета и да спечели. Следователно трябва да разгледаме случаят в който Бил играе 1 монета. Джон също ще играе 1 монета. Сега има 3 случая:

- Бил е играл 1 монета. Тогава и Джон играе една монета и вече сме в ситуацията в която Джон допълва до кратно на 4 и печели.
- Бил е играл 3 монети. Тогава и Джон играе 3 монети и на масата има 8 монети, което отново позволява на Джон да си приложи стратегията.
- Бил е играл 2 монети. Тогава на масата има 4 монети. Джон играе 1 монета. Ако Бил не играе 3 монети, то Джон може да допълни до кратно на 4 и да спечели. Ако Бил продължава да играе по 3 монети, а Джон продължава да играе по 1, то монетите на Бил ще свършат и на последният си ход, когато монетите на масата са 97, той ще има само 2 останали монети и няма да може да спечели. Следователно Джон печели при всички случаи.

Да разгледаме края:

Зад 10. Даден е правоъгълник $m \times n$, разделен на единични квадратчета, чиито страни са начертани с молив. Томи и Аника се редуват (Томи е пръв); който е на ход, изтрива някоя единична отсечка. Ако на чертежа не остане нито един затворен контур, последният играл губи, а другият печели. Кой ще победи при правилна игра?

Във всеки затворен контур има четен брой отсечки (ако оцветим върховете на квадратчетата шахматно, то по контура цветовете се редуват). Печелившата стратегия се състои в това да не се трият отсечки от последния оцелял затворен контур. Общият брой отсечки е $(m+1)n+(n+1)m=2mn+m+n$, четността на което е като тази на $m+n$. Следователно Томи ще спечели при нечетно $m+n$, а Аника – при четно $m+n$.

Зад 11. Петър и Васил играят следната игра: Дадена е таблица 9x9 направена от клечки с дължина 1. На всеки ход играчът взима една клечка. Печели този, след чийто ход не остане нито един квадрат 1x1. Кой печели при правилна игра?

Решение: Нека забележим, че преди всеки ход на Васил са останали нечетен брой клечки. Ще разгледаме три случая за ход на Васил:
1) Ако са останали повече от 3 квадрата – тогава Васил взима крайна клечка (има се предвид по външния контур на останалата таблица). И не нарушава повече от един квадрат.

2) Ако са останали 3 квадрата – тогава Васил взима клечка, която не участва в тези квадрати. Ако ли пък това е невъзможно, то значи трите квадрата са два един до друг и един сам. Тогава взима крайна клечка от единият от двойните квадрати. Сега ако Петър

вземе също такава клечка, то Васил взима третата такава клечка и после Петър нарушава единият останал квадрат, а Васил другият.

3) Ако са останали два квадрата и те не са долепени, то има поне още една клечка, понеже преди ходът на Васил имаме нечетен брой клечки. Ако ли пък са долепени, той взима средната клечка и разваля и двата квадрата.

Асорти:

Зад 12. Хитър Петър и Настрадин Ходжа намерили 20 еднакви плика с пари. Решили да играят следната игра за да си ги разделят: На всеки плик чертаят таблица 7x1, след което Настрадин Ходжа казва 1 или 2, а Хитър Петър го записва в някоя празна клетка на някой плик, а след това показва на Настрадин Ходжа къде го е записал. По този начин след 140 хода на всеки плик е записано седемцифрено число. Настрадин Ходжа получава по един плик за всяко различно написано седемцифрено число, а Хитър Петър получава остатъка. Колко плика може да си гарантира всеки от тях при правилна игра?

Решение: Хитър Петър може да вземе 18, а Настрадин Ходжа 2. Ясно е, че Настрадин Ходжа ще вижда къде ще бъде написана последната цифра и може да си гарантира числото, в което тя участва да е различно от останалите. Хитър Петър може да си гарантира 18 със следната стратегия:
Поставя пликовете един под друг, така че да се образува таблица 7x20. Сега когато Настрадин каже 1, Хитър Петър го записва на най-левият незапълнен стълб в таблицата в най-горната възможна клетка. Когато каже 2, то се записва в най-десният стълб в най-горната възможна клетка. По този начин можем да имаме само един стълб, в който да имаме и единица и двойка, следователно имаме максимум 2 различни числа.

Зад 13. На островът Drakaris има 100 изключително мъдри дракона. Всичките са със зелени рога, но никой от тях не знае цвета на собствените си рога, а на острова няма огледала или какъвто и да е друг начин да видиш цвета на рогата си (водата е черна на цвят и в нея няма отражение). Драконовият кодекс повелява, че е абсолютно забранено един дракон да коментира цвета на своите рога, или рогата на друг. Също така най-големият срам за един дракон е да има зелени рога, и ако някой дракон е сигурен, че има зелени рога, той трябва да се самоубие през първата следваща нощ, точно в 00:00. Един ден на острова попаднал корабокрушенец, погледнал всичките дракони и преди да бъде изяден успял да каже само: „Я виж ти, дракон със зелени рога“. Какво ще се случи на острова в следващите дни?

Решение: Нека разгледаме ситуацията за по-малко дракони. Ако има 1 дракон, след като чуе, че има дракон със зелени рога, той ще се самоубие през първата нощ. Ако драконите са 2, всеки от тях вижда, че другият е със зелени рога, и чака той да се самоубие през нощта. Но това не става, което подсказва на всеки един от тях, че другият също чака, тоест и той вижда дракон със зелени рога. От там и двата дракона правят извода, че са със зелени рога, и на втората вечер се самоубиват. Аналогично при 3 дракона, всички заедно се самоубиват на третата нощ.

Зад 14. Злият гений доктор Матю Матиков ви е взел в плен с няколко други човека. След това ви е наредил в колона и ви е сложил по един цвят шапка – червена или зелена. Всеки в редицата вижда шапките на всички пред него в редицата, но не и своята. Докторът ви предлага следната игра за живота ви: Познайте цвета на шапката си и сте свободни, но ако сбъркате, по-добре на не ви казвам какво ще ви се случи. Това, което докторът не знае, е че вие още миналата вечер сте разбрали какво ви е скроил той и сте се наговорили с останалата част от пленниците. Предложете най-добрата стратегия – тази чрез която ще се спасят най-много хора.

Зад 15. Келвин и Джеймс искат да си поделят 25 монети със стойности 1, 2, ..., 25 копейки. На всеки ход, някой от тях избира монета и другият решава кой да я вземе. Келвин първи избира монета, а на следващите ходове избира този, който до момента разполага с повече копейки. Ако има равенство в стойността на монетите у Келвин и Джеймс, на ход е този, който е бил предния път. След като всички монети са взети, печели този, който има повече копейки. Кой печели?

Решение. В играта винаги има победител, понеже 1+2+...+25=425 е нечетно. Ще докажем, че Джеймс има печеливша стратегия. Той може да избере дали да задържи или да даде на Келвин монетата, която Келвин избере на първия ход. Тези две ситуации са напълно симетрични и следователно Джеймс печели в точно една от тях и може да я избере.