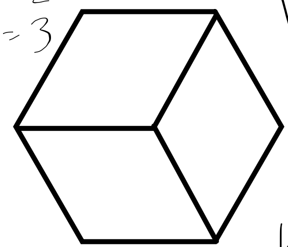
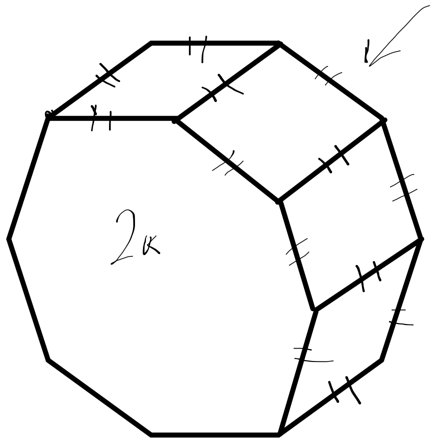
Зад 9. Докажете, че всеки правилен 2n ъгълник може да бъде разрязан на ромбове.

БАЗА: $n=2$
$n=3$



ИХ: За 2к-ъгълник може.

ИС: За 2к+2-ъгълник може.



д(*) изпъкнал

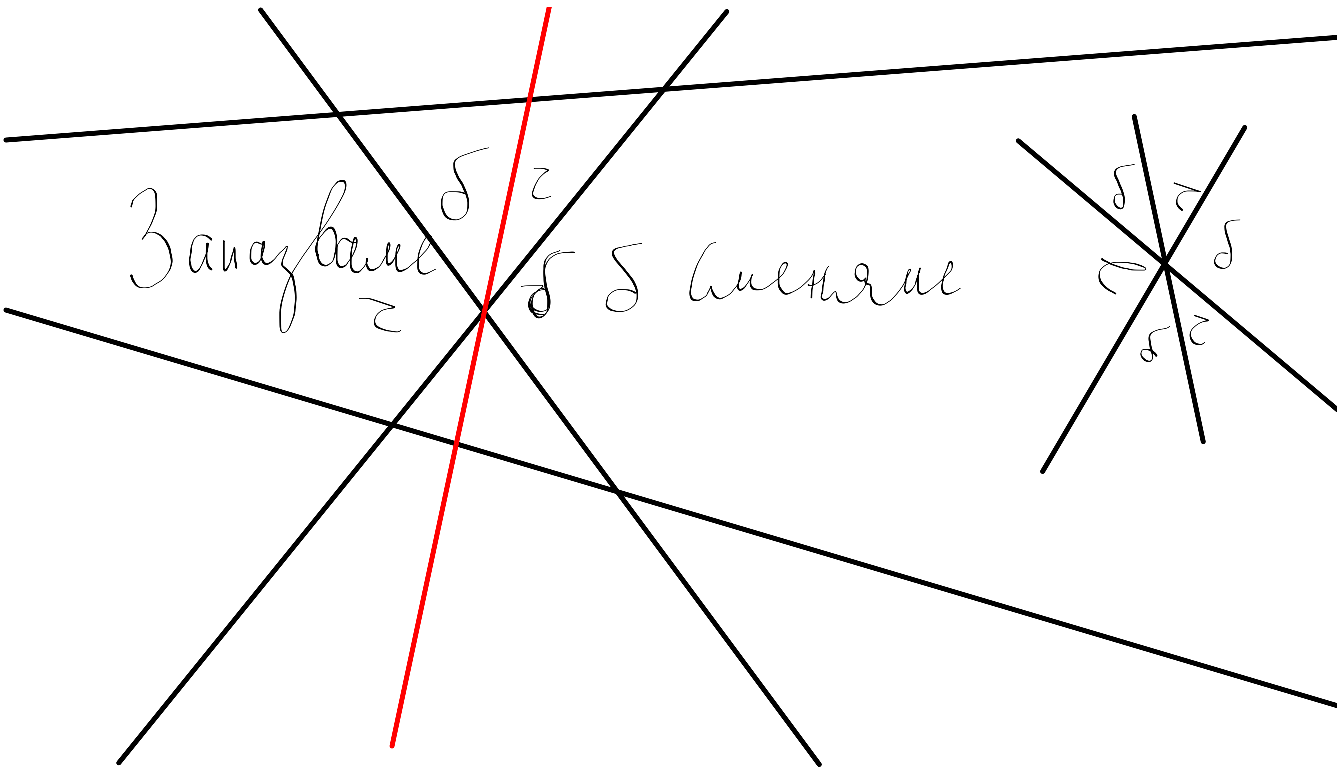
Докажете, че всеки 2n-ъгълник с равни страни, в който всяка страна е успоредна на противоположната, а може да бъде разрязана на ромбове.

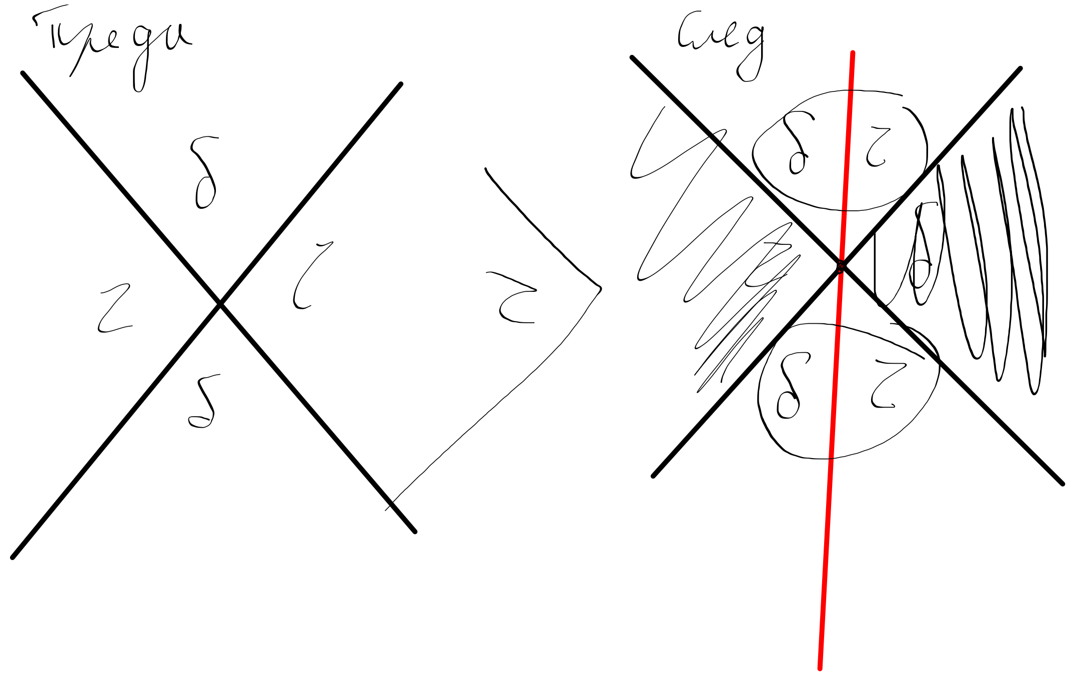
Зад 10. Равнината е разделена на области с n прави, никои три от които не се пресичат в една точка. Да се докаже, че частите могат да се оцветят в два цвята така, че всеки две съседни области да са разноцветни.

по страна. База ✓

ИХ: Можем да го направим за всеки k прави.

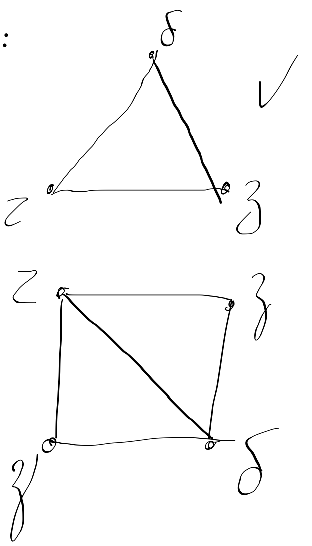
ИС: Можем ———————— || —— k+1 прави


б
г
Запазваме
г
б б Сменяме
б
г
г
б
б
г


Преди
Б
Г
Г
Б
Г
След
Б
Г
Б
Б
Г

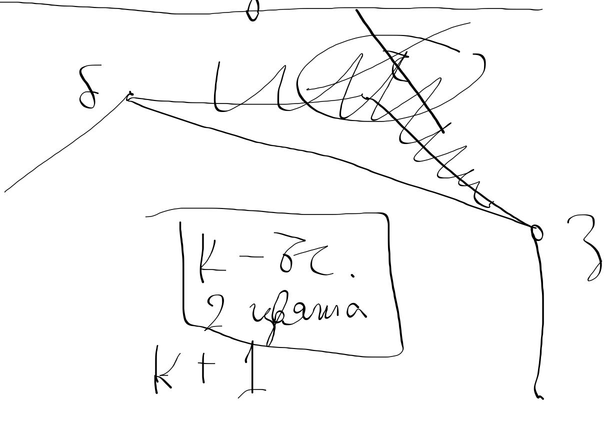
Зад 11. Върховете на изпъкнал многоъгълник са оцветени в три цвята така, че всеки цвят присъства и никои два съседни върха не са едноцветни. Докажете, че многоъгълникът може да се раздели на триъгълници с диагонали така, че върховете на всеки от тези триъгълници да са оцветени в три различни цвята.

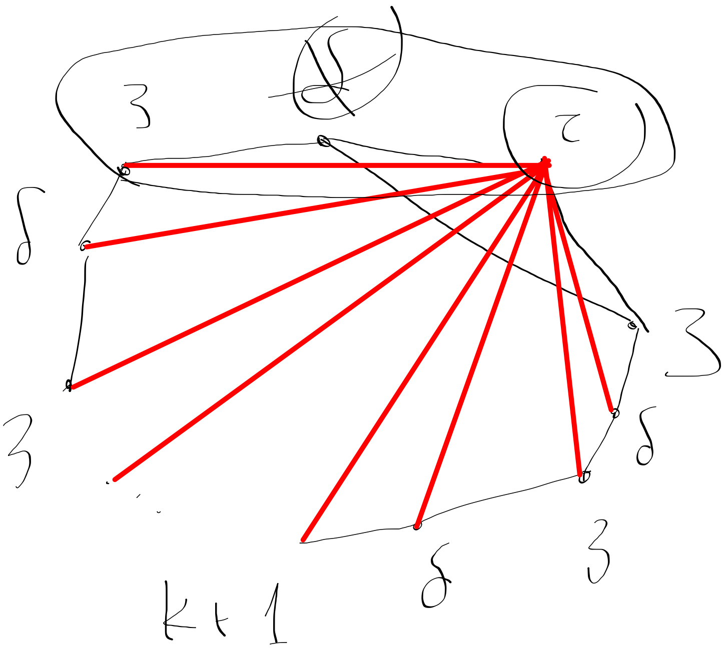
БАЗА:

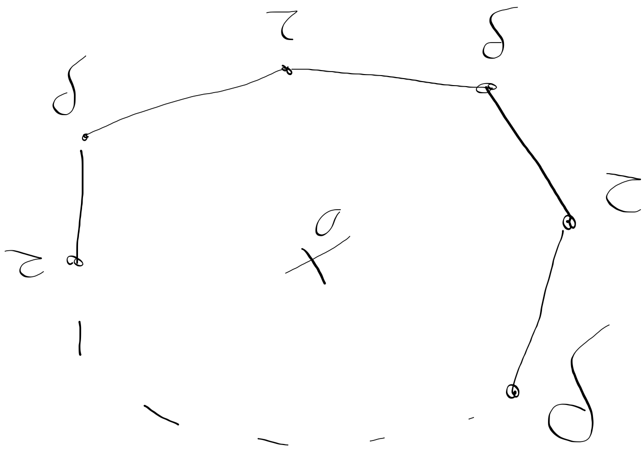


ИХ: Става за к-бг.

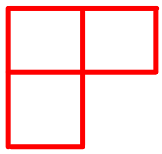
ИС: Става за к+1 - бг.



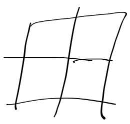

k+1



Зад 12. Докажете, че квадрат $2^n x 2^n$,от който е изрязано едно квадратче, може да се разбие на триминота.

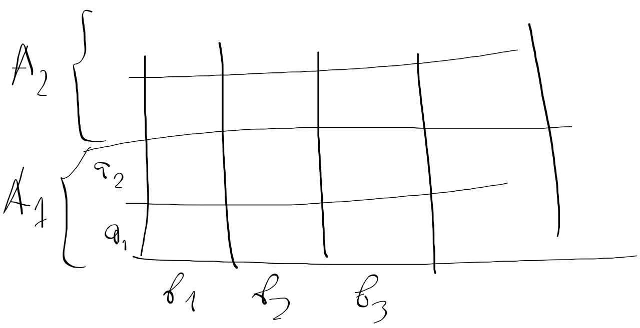


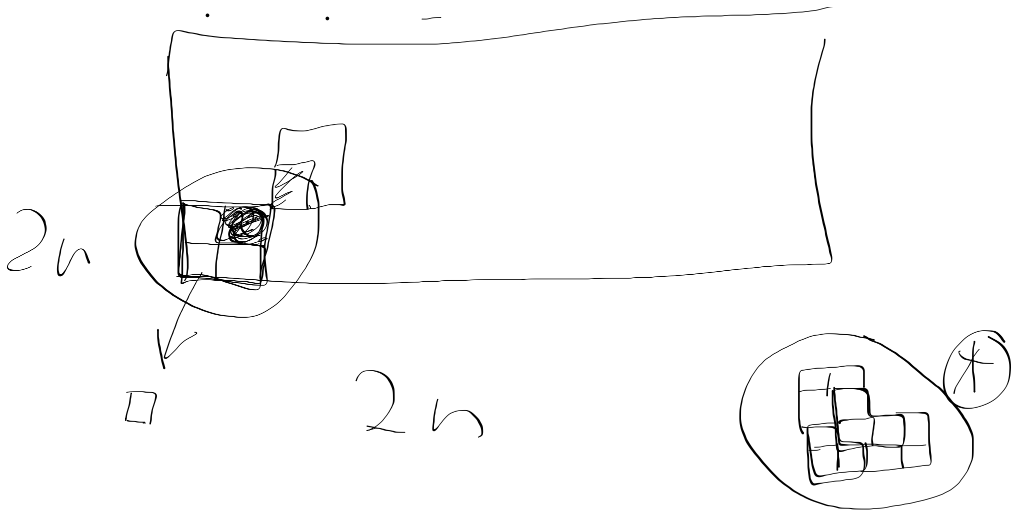
База: $n = 1$



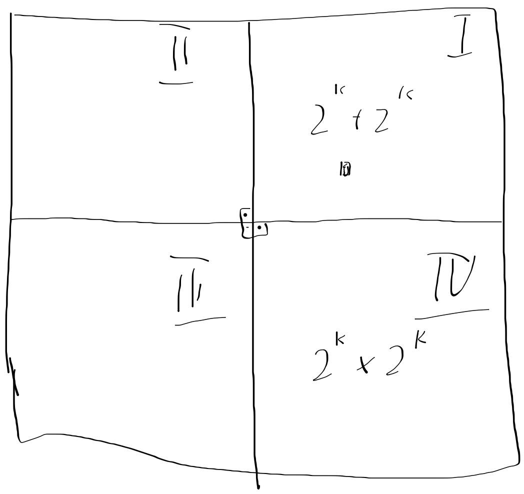
ИХ: За $2^k \times 2^k$ става.

ИС: За $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ става.





$n \times n$ с триминота, то можем да направим таблица $2n \times 2n$ с (*). Свободното квадратче ще сложим до тримино.

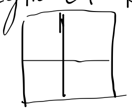


БОО празното е в горен десен. От ИХ $\Rightarrow$ I може да се триминира.
От ИХ $\Rightarrow$ II, III и IV могат да се триминират.
Готово!

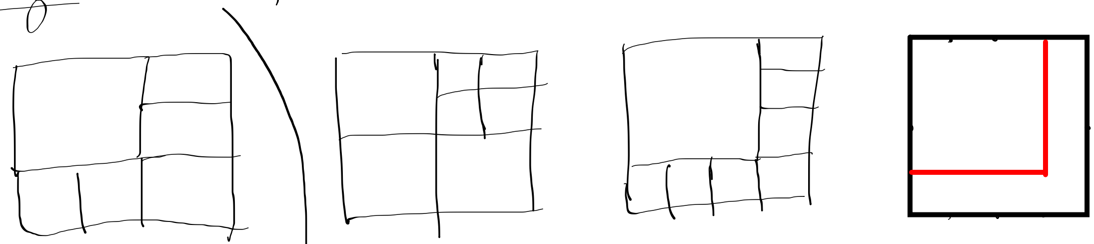
Зад 13. Докажете, че квадрат може да се разреже на n квадрата за всяко n>5.

ИХ: вярно за k

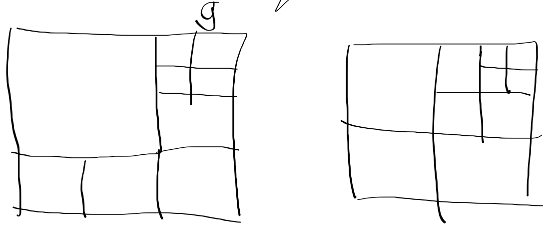
ИС: вярно за k+3 $\Rightarrow$ Едно от кв. го разделяме на 4.



База n=6 ; n=7 n=8



9



10

Зад 14. На окръжност са отбелязани 21 точки. Да се докаже, че съществуват поне 100 дъги с дължина по-малка или равна на 1/3 от окръжността.

За домашна.

Зад 15. Докажете, че не можем да разрежем изпъкнал 22-ъгълник на 7 петоъгълника чрез някои от диагоналите му.

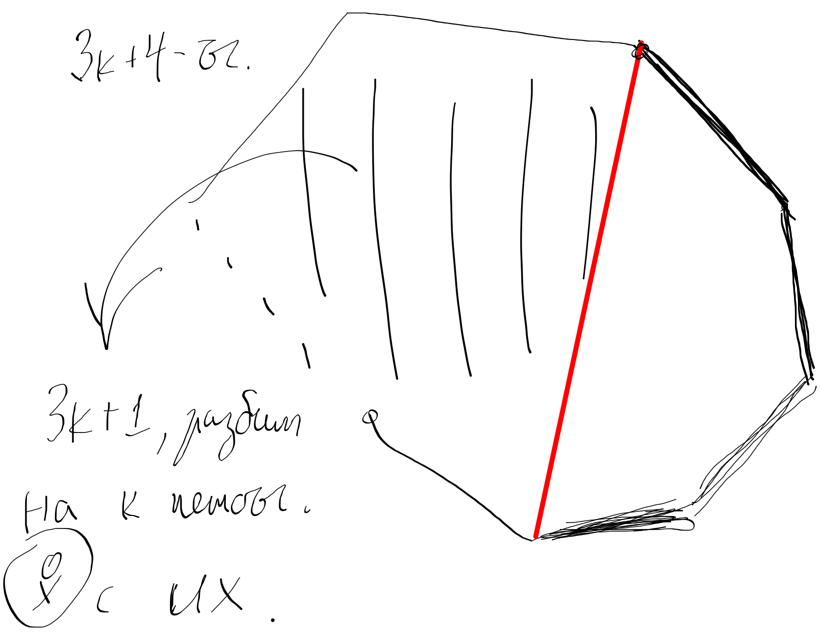
ИХ: Не можем да разрежем 3к+1 (изпъкнал) ъгълник на к петоъгълника чрез някои от диаг.

ИС: Не ... 3к+4-ъгълник на к+1 петоъг. ...

База: к = 1 ✓

3к+4-ъг. Доп, че сме успели. Доп, че в него всеки петоъг има ≤ 3 страни по контура. $(k+1) \cdot 3 = 3k+3 < 3k+4$, тоест 1 страна не участва в 5-ъг. ⨂.

Извод: Има петоъг. с ~~поне~~ 4 страни по контура.



Задача 16. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са две по две различни естествени числа и нека M е множество от $n-1$ естествени числа, различни от $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0, като прави n скока надясно с дължини $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в някакъв ред. Да се докаже, че последователността на скоковете може да се избере така, че скакалецът никога да не попада в точка от M.

Хубавото неравенство: - Еквивалент на НКБШ

$$\frac{a_1{}^2}{b_1}+\frac{a_2{}^2}{b_2}+\frac{a_3{}^2}{b_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}{}^2}{b_{n-1}}+\frac{a_n{}^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n)^2}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n}$$

Ретроградна индукция

Неравенство между САСГ:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \text{където} \quad a_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n \in N.$$

$$a_1 a_2 \ldots a_n \le \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$$

БАЗА $\boxed{a_1 \cdot a_2 \le \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}$

$4a_1a_2 \le a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$

$0 \le a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2$

$0 \le (a_1 - a_2)^2$ ✓

ИХ: САСГ е вярно за k.

ИС: САСГ е вярно за 2k.

$$a_1 a_2 \ldots a_k \le \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right)^k$$

$$b_1 b_2 \ldots b_k \le \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{k}\right)^k$$

САСГ за 2 числа

с $a_1 = a_1 \cdot a_2 \ldots a_k$

$a_2 = b_1 b_2 \ldots b_k$

ИХ: Вярно за l.

ИС: Вярно за $l-1$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ретроградна индукция пълно решение:

Неравенство между САСГ:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \quad \text{където} \quad a_i \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad n\in N. \qquad (1)$$

Очевидно при $n = 1$ неравенството е вярно. При $n = 2$ получаваме

$$\sqrt{a_1a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}$$

което също е вярно. Допускаме, че неравенство (1) е вярно за $n = k$. Ще докажем, че е вярно и за $n = 2k$.

Полагаме $A=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$ и $B=\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}}$.

Съгласно индукционното предположение имаме

$$A \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}; \quad B \le \frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}{k}.$$

Събираме тези неравенства и като използваме $\sqrt{AB} \le \dfrac{A+B}{2}$ получаваме

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2k}}{2k}.$$

С това (1) е доказано за n = 2, 4, 8, …

Нека допуснем, че неравенство (1) е вярно за някое $k > 1$. Ще докажем, че е вярно и за k-1. От индукционното предположение за произволни k неотрицателни числа имаме

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}. \qquad (2)$$

Полагаме $a_k=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$,

заместваме в (2) и последователно получаваме:

$$\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_{k-1}.\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}{k} = \frac{k.(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})}{k.(k-1)} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$$

Повдигаме на степен k, откъдето

$$a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \le \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \right)^{k-1}.$$

Коренуваме и получаваме

$$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$