Метод на пълната математическа индукция

Методът на пълната математическа индукция е следният:

Желаем да докажем едно твърдение за всяко число n. Първо разглеждаме дали твърдението е вярно за n=1 (не е нужно да е точно 1, просто трябва да се уверим, че работи за някое число). Това се нарича база на индукцията. След това предполагаме, че твърдението е вярно за някое n=k. Това се нарича индукционно предположение (индукционна хипотеза/ИХ). Целта ни сега е да докажем твърдението за n=k+1 като използваме нашата ИХ. Това се казва индукционна стъпка. Ако успеем то получаваме следното:

Твърдението е вярно за n=1. Но ако k=1, то от индукцията следва, че твърдението е вярно за k+1=1+1=2. Сега твърдението е вярно за n=2. Но ако k=2, то от индукцията следва, че твърдението е вярно за k+1=2+1=3. Сега твърдението е вярно за n=3. Но ако k=3, то от индукцията следва, че твърдението е вярно за k+1=3+1=4. Сега твърдението е вярно за n=4. Можем да продължаваме нататък до безкрай. Следователно твърдението е вярно за всяко n.

Зад 1: Докажете, че 1+2+3+…+n=$\frac{n(n+1)}{2}$ ✓

БАЗА: $n = 1$

$1 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

$\downarrow$

1

ИХ: $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

ИС: $\boxed{1+2+\dots+k} + (k+1) \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\downarrow$

$\frac{k(k+1)}{2}$

$\frac{k(k+1)}{2} + \overbrace{k+1}^{2} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{(k+1)}{2}(k+2) \stackrel{\checkmark}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$1 \Rightarrow 2$

$2 \Rightarrow 3$

$3 \Rightarrow 4$

…

Зад 2: Да се докаже, че за всяко естествено число n е вярно: $1+3+5+\ldots+(2n-1)= n^2$

$2.1-1$

1

БАЗА $n=1$ $1=1^2$ ✓

ИХ: $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

ИС: $\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k^2}+(2k+1)\overset{?}{=}(k+1)^2$

$\boxed{k^2+(2k+1)}\overset{?}{=}(k+1)^2$

$k^2+(2k+1)\overset{\checkmark}{=}k^2+2k+1$

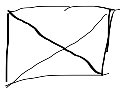
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\Downarrow$

$(a+b)(a+b)$

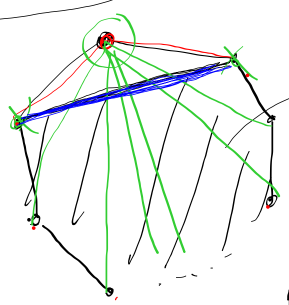
Зад 3. Да се докаже, че във всеки изпъкнал n-ъгълник броят на всички диагонали е $S_n=\frac{n(n-3)}{2}$ (за n>2)

База $n=3$  ✓ $\frac{3.(3-3)}{2}=0$

$n=4$  ✓ $\frac{\cancel{4}^{2}.(4-3)}{\cancel{2}}=2$

Да допуснем, че формулата е вярна за някое число k. Тоест $S_k=\frac{k(k-3)}{2}$. Ще докажем, че

$$S_{k+1} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$



S_{k+1}

$k+1-3=k-2$

$$\frac{k(k-3)}{2}+1+k-2=$$

$$=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=$$

$$=\frac{k^2-3k}{2}+\frac{2k-2}{2}=$$

$$=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}$$

$$\frac{k^2+k-2k-2}{2} \stackrel{?}{=} \frac{k^2-3k+2k-2}{2}$$ ✓

Зад 4. Докажете, че сборът от първите n степени на двойката е равен на следващата степен без 1.

$1+2+\cancel{4}+8+16=32-1$

$1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$

$2^{1-1}=2^0=1$

БАЗА: $n=1$

$1=2^1-1$

$1=1$ ✓

ИХ: $1+2+2^2+\dots+2^{k-1}=2^k-1$

ИС: $\underbrace{1+2+2^2+\dots+2^{k-1}}_{2^k-1}+2^k\overset{?}{=}2^{k+1}-1$

$2^k-\cancel{1}+2^k\overset{?}{=}2^{k+1}-\cancel{1}$

$2^k+2^k\overset{?}{=}2^{k+1}$

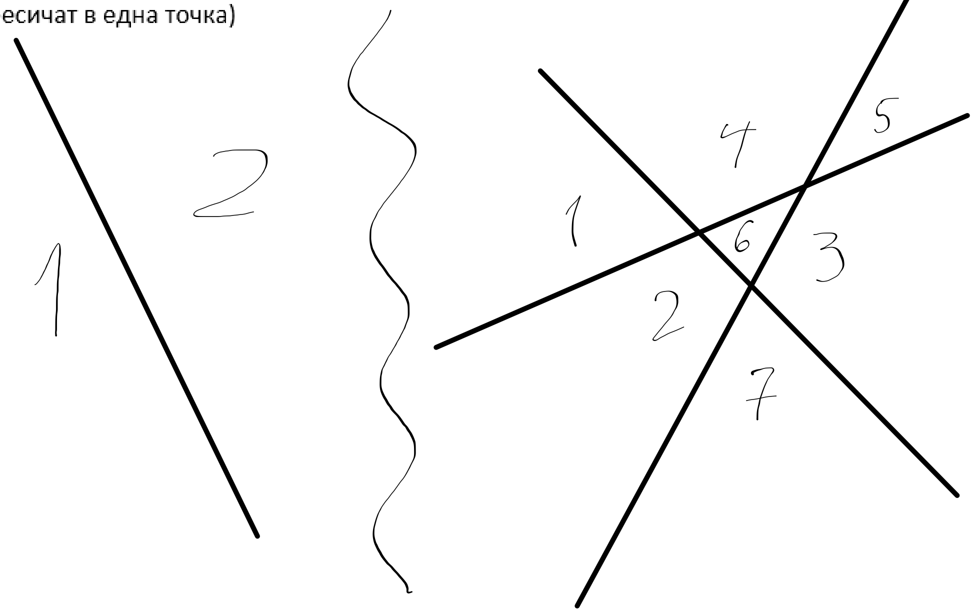
$2.2^k\overset{?}{=}2^{k+1}$

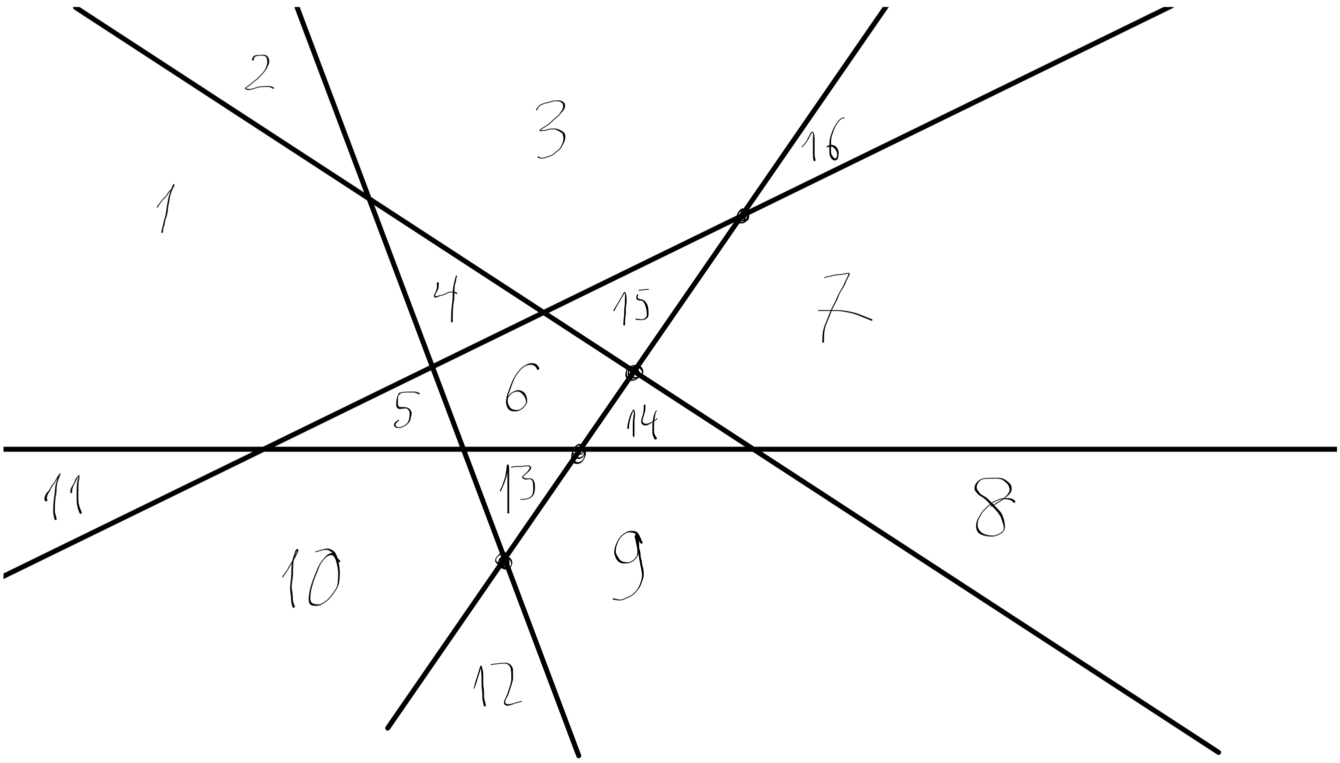
$2^1.2^k\overset{?}{=}2^{k+1}$

$2^{k+1}\overset{\checkmark}{=}2^{k+1}$

n(n+1)/2+1

Зад 5. На колко части разделят равнината n прави в общо положение (никои две не са успоредни и никои 3 не се пресичат в една точка)




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

1 права → 2 | 1
2 прави → 4 | 3
3 прави → 7 | 6
4 прави → 11 | 10

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{\frac{k(k+1)}{2}+1}$$

~~n 7 11 5~~

<u>ИХ</u>: k прави делят равнината на $\frac{k(k+1)}{2}+1$ части

$\boxed{ИС}$: k+1 прави делят равнината на $\frac{(k+1)(k+2)}{2}+1$ части.

k прави → $\frac{k(k+1)}{2}+1$ Още 1 права: k+1 части

$$\frac{k(k+1)}{2}+\cancel{1}+\underbrace{k+1}^{2}\overset{?}{=}\frac{(k+1)(k+2)}{2}+\cancel{1}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\overset{?}{=}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

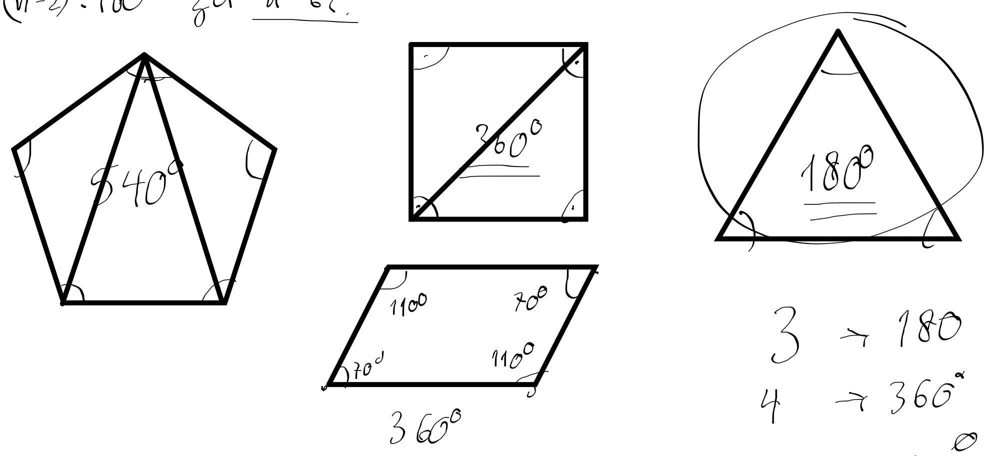
$$\frac{(k+1)}{2}(k+2)\overset{\vee}{=}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Заключение:

$\boxed{n \text{ прави } \frac{n(n+1)}{2}+1}$

Зад 6. Намерете и докажете чрез индукция формулата за сбор от вътрешни ъгли в n-ъгълник.

Их: $(n-2).180^0$ за n-ъг.



$$\left.\begin{array}{l} 3 \to 180 \\ 4 \to 360^0 \\ 5 \to 540^0 \\ 6 \to 720^0 \end{array}\right\} n \to (n-2).180^0$$

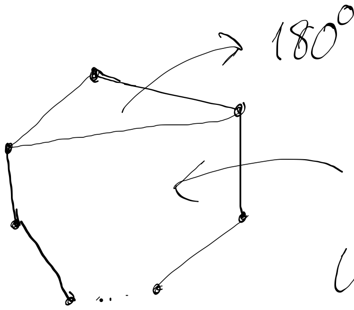
Зад 6. Намерете и докажете чрез индукция формулата за сбор от вътрешни ъгли в n-ъгълник.

$(n-2)\cdot 180^\circ$ за n-ъг.

База: $n=3$ 3-ъг. $(3-2)\cdot 180^\circ \stackrel{?}{=} 180^\circ$ ✓

ИХ: за k-ъг. сборът е $(k-2)\cdot 180^\circ$ $k+1-2=k-1$

ИС: за k+1-ъг сборът е $(k-1)\cdot 180^\circ$



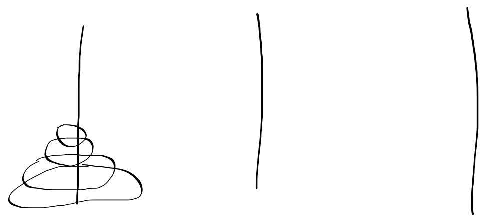
Сбор от ъгли е $(k-2)\cdot 180^\circ$

Извод: Сбор от ъгли в k+1-ъг е $(k-2)\cdot 180^\circ + 180^\circ \stackrel{?}{=} (k-1)\cdot 180^\circ$ ✓

2^n-1

Зад 7. Ханойските кули

Дадени са три стълба. На първият са поставени n диска с различен диаметър, наредени един върху дру
от най-големия към най-малкия диск (най-малкият е най-отгоре). Целта е да се преместят всички дискове на третия стълб, като се запази подредбата им и при разместванията се спазва правилото винаги да се поставя по-малък диск върху по-голям. С колко най-малко хода може да се направи това, ако един ход е преместването на един диск от един на друг стълб?



$4 \to 15$

$\boxed{2^n - 1}$

диск	ход
1	1
2	3
3	7
4	15

2^n-1

Зад 7. Ханойските кули

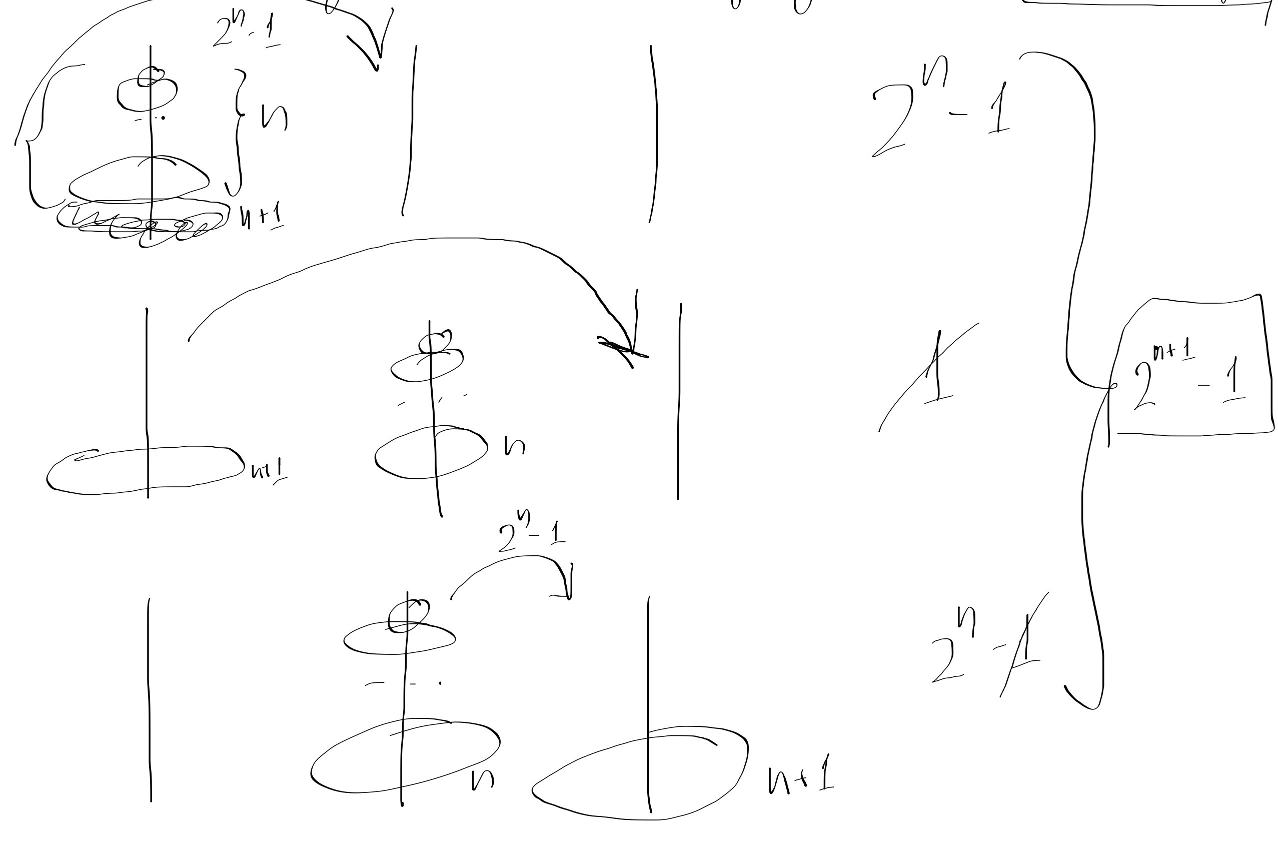
Дадени са три стълба. На първият са поставени n диска с различен диаметър, наредени един върху друг от най-големия към най-малкия диск (най-малкият е най-отгоре). Целта е да се преместят всички дискове на третия стълб, като се запази подредбата им и при разместванията се спазва правилото винаги да се поставя по-малък диск върху по-голям. С колко най-малко хода може да се направи това, ако един ход е преместването на един диск от един на друг стълб?

$\boxed{2^n-1}$

База ✓

ИХ: За n диска имаме нужда от 2^n-1 хода.

ИС: За $n+1$ диска имаме нужда от $\boxed{2^{n+1}-1 \text{ хода}}$.



Зад 8. В шахматен турнир всеки участник играе с всеки по една партия. Да се докаже, че играчите може да се номерират така, че нито един участник да не е загубил от играчът непосредствено след него.

БАЗА: $n=2$ $A \to B$

AB ✓

~~BA~~

ИХ: Ако имаме k играчи, те могат да се номерират по желания начин.

ИС: Ако имаме $k+1$ играчи, то ... .

Взимаме $k+1$ играча. $a_1 a_2 \ldots a_k$. b.

всеки е победил човекът след него. $b \to a_1$

Последният който е победил b да бъде a_m.

$a_1 a_2 \ldots, a_m, b, a_{m+1}, \ldots, a_n\ b$