Рекурсия, рекурентни редици

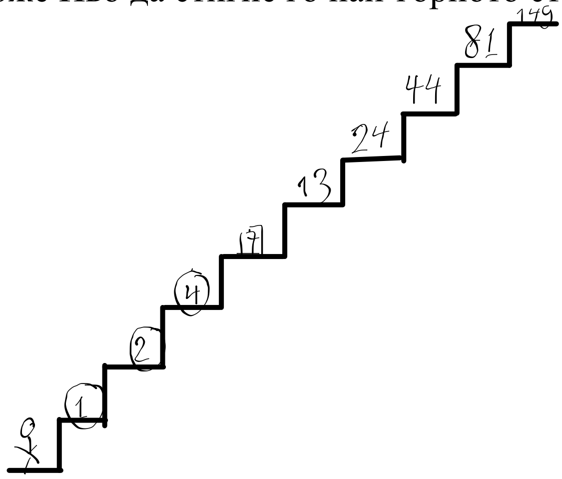
Рекурсията е похват, който използва връзката между отделните членове в една редица, вместо да разчита на директна формула чрез n. Правилният термин е рекурентно зададена редица и означава редица, в която всеки следващ член се получава чрез формула от някои от предишните. Най-яркият пример за такава редица са числата на Фибуначи, при които всяко следващо число се получава като сбор на предишните две, а първите две числа са 0 и 1 (на някои места може да ги видите и като 1 и 1). От самата дефиниция на Фибуначи можете да забележите, че рекурентно зададените редици трябва да имат фиксирани първи няколко члена. Интересно е и намирането на формула за членовете на една редица чрез рекурентна връзка, например за Фибуначи такава формула е:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k}.$$

Но това не е фокусът на тази лекция. Вместо това ще се опитваме да намерим такава рекурентна връзка в комбинаторни задачи, най-често в такива, в които друга връзка е твърде трудно да се направи.
Бележка: Когато сте на състезание, независимо дали този метод ще проработи или не, хубаво е да си направите примери за малки числа, за да може по-добре да разберете как работи задачата.

Повечето от следващите задачи не са авторски, взел съм ги от „КАК ДА БРОИМ БЕЗ ДА БРОИМ, Състезателни теми от математически лагери, Том 1“; Републикански състезания; problems.ru

Зад 1. Иво има стълба от 9 стъпала. От дадено стъпало той може да отиде на следващото, по-следващото или на по-по-следващото. По колко различни начина може Иво да стигне го най-горното стъпало?



149

Зад 2. В долното ляво поле на дъска 4×4 е поставен цар. На всеки ход имаме право да го местим едно поле надясно, едно поле нагоре или едно поле по диагонал – надясно и нагоре. По колко различни пътя може да стигне царят до горното дясно поле?

1	7	25	63
1	5	13	25
1	3	5	7
1	1	1	1

Зад 3.Ще наричаме една дума *добра*, ако не съдържа поредицата АА. (Например думата ABBACC е добра.) Колко добри шестбуквени думи можем да съставим от буквите А, В и С?

Всички − $3^6 - 5.3^4 + 4.3^3 - 3.3^2 + 2.3 - 1 =$

$= 729 - 405 + 108 - 27 + 6 - 1$

AA___ 3^4

_AA___ 5.3^4

↓

2 А-та

AAA___ 4.3^3

AA,A

$729 + 108 + 6 = 843$

$405 + 27 + 1 = 433$

$843 - 433 = 410$?

Зад 3.Ще наричаме една дума *добра*, ако не съдържа поредицата АА. (Например думата ABBACC е добра.) Колко добри шестбуквени думи можем да съставим от буквите A, B и C?

бр n-буквени думи без AA е a_n

AB $\underbrace{\qquad}_{a_4}$

AC $\underbrace{\qquad}_{a_4}$

$2(a_{n-2}+a_{n-1})$

$$\boxed{a_n = 2a_{n-2} + 2a_{n-1}} \qquad n \geq 3$$

$a_1 = 3$ $a_2 = 8$ $a_3 = 22$

AB(n-2 букви) a_{n-2}

AC a_{n-2}

B (n-1 букви) a_{n-1}

B

B

C (n-1 букви) a_{n-1}

C

C

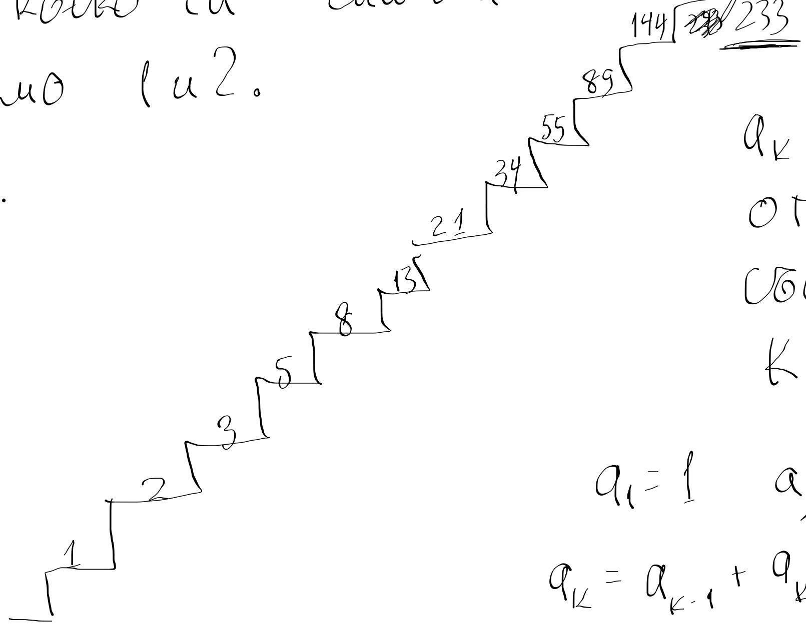
$a_4 = 60$ $a_5 = 164$

$a_6 = 448$

Зад 4. Разглеждаме множеството от естествени числа със сбор от цифрите 12 и такива, че в десетичния им запис не участват други цифри освен 1,2 и 3. Каква е вероятността в записа на случайно избрано число от това множество да не участва цифрата 3?

$$\frac{\text{хубави}}{\text{всички}} = \frac{233}{927}$$

1) Колко са числата със сбор 12 и цифри само 1 и 2.



a_k е бр. числа от 1-ци и/или 2-ки със сбор на цифри k.

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 3$ 5

$a_k = a_{k-1} + a_{k+2}$

2) 1 2 4 7 13 24 44 81 149 274 504

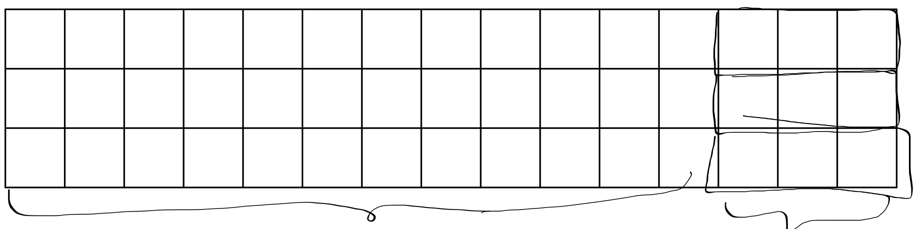
$$\begin{array}{r} 149 \\ +274 \\ 504 \\ \hline 927 \end{array}$$

$$\frac{433}{927}\ ?$$

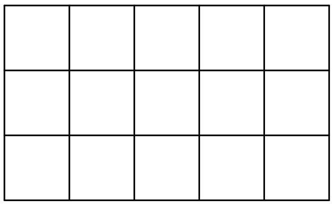
✓

Зад 5. (ЕМТ х година) Имате дъска 3x15 и искате да я запълните с 15 правоъгълника 3x1. По колко начина можете да направите това? (Дъската се счита за фиксирана, тоест две запълвания, които се получават едно от друго при завъртане се считат за различни)

a_k дъска $3 \times k$

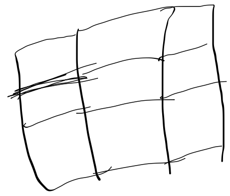


$k-3$ $\quad$ 3



$a_1 = 1$

$a_2 = 1$



$a_3 = 2$

$$\boxed{a_k = a_{k-1} + a_{k-3}}$$

$a_4 = 2 + 1 = 3$

$a_5 = 4$

$a_6 = 6$

$a_7 = 6 + 3 = 9$

$a_8 = 13$

$a_9 = 19$

$a_{10} = 28$

$a_{11} = 41$

$a_{12} = 60$

$a_{13} = 88$

$a_{14} = 129$

$a_{15} = 189$

Зад 6. Петърчо има думата КАМИОН написана на парче картон. Разрешено е да отреже част от думата и да я залепи на друго място, а може и на същото. Примерно реже ОН и го залепя след К, за да получи думата КОНАМИ. Колко различни думи може да получи по този начин?

a_n - бр. n-букв. думи изп. усл.

1 сл. n-букв. дума нека започва с К $\underbrace{\qquad}_{a_{n-1}}$

2 сл. не започва с К.

КАМИОН

КАМИОН 5

КАМИОН 4

КАМ 3

2, 1

КАМИОН

МИОКАН

МИОКАН

n букв дума →

$(n-1)+(n-2)+\dots+2+1 = \frac{(n-1).n}{2}$

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + \frac{(n-1).n}{2}}$$

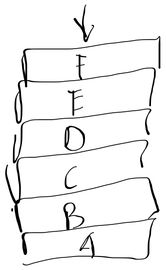
$a_1 = 1 \qquad a_2 = 2$

$a_3 = 2 + \frac{2.3}{2} = 5$

$a_4 = 5 + \frac{3.4}{2} = 11 \qquad a_5 = 11 + \frac{4.5}{2} = 21$

$a_6 = 21 + \frac{5.6}{2} = \boxed{36}$

Зад 7. Шефът поставя писма A, B, C, D, E, F едно върху друго, за да ги отпечата секретарката. Когато може, секретарката взема най-горното писмо и го печата. Една шестбуквена дума от буквите A, B, C, D, E, F ще наричаме възможна, ако писмата могат да се отпечатат в този ред. Например ABCDEF, FEDCBA и ABCFED са възможни, но ABCFDE не е. Намерете броя на възможните думи.



132

X	X	X	X	X	42	132
X	X	X	X	14	42	90
X	X	X	5	14	28	48
X	X	2	5	9	14	20
X	1	2	3	4	5	6
•	1	1	1	1	1	1

отпеч. ↑

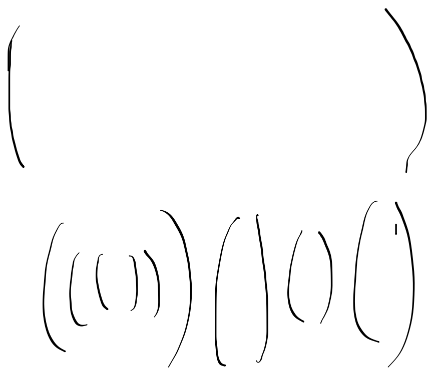
→ пише

Зад 8. Дадено е естествено число n. Шеф пише n писма, номерирани 1, 2, 3, ..., n. Когато напише писмо, го поставя отгоре в една кутия. Когато секретарката успее, взема най-горното писмо от кутията и го печата. Една пермутация на числата от 1 до n ще наричаме печатна, ако е възможно писмата да бъдат отпечатани в този ред. Докажете, че броят на всички печатни пермутации е $\boxed{\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}}$; този брой се нарича <u>n-то число на Каталан</u> и се бележи с $\mathbf{C}_n$.

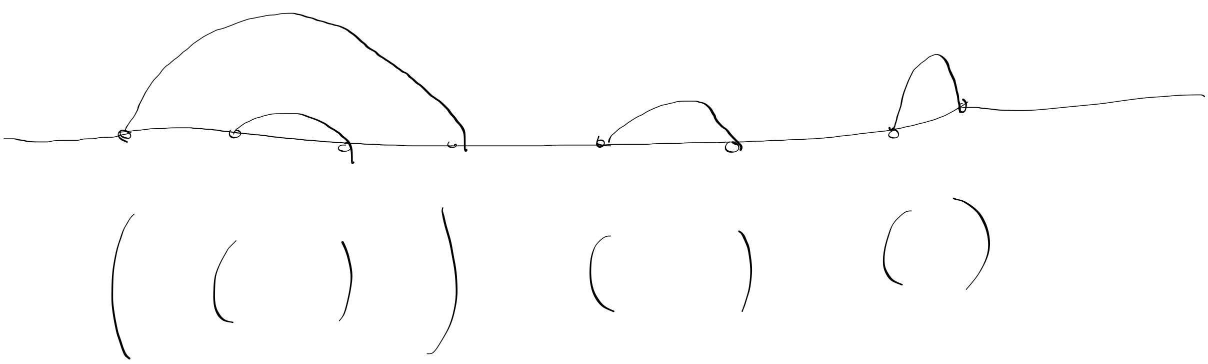
https://www.youtube.com/watch?v=i5V21WCHTVo

Зад 9. Пресметнете C_n за $n = 0, 1, 2, ..., 8$.

Зад. 10. Докажете, че броят на начините да се поставят правилно n чифта скоби е C_n.



Зад 11. На права g са отбелязани 8 точки. Те трябва да се свържат по двойки с непресичащи се дъги, които се намират в едната полуравнина относно g. По колко начина може да стане това?



Зад 12. По колко начина могат 10 точки на окръжност да се свържат с 5 непресичащи се хорди?

Зад 14. Докажете Основното свойство на числата на Каталан („ОСЧК”):
$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \dots + C_nC_0$.

$$\left(\underbrace{C_k}_{k}\right)\underbrace{C_{n-k}}_{n-k}$$

Задача 16. (60447). Колко са различните множества от числа $\{a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_n\}$, за които всяко от числата е 1 или -1, сборът от всички числа е 0, а всички частични суми $a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3, \dots , a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ са неотрицателни.