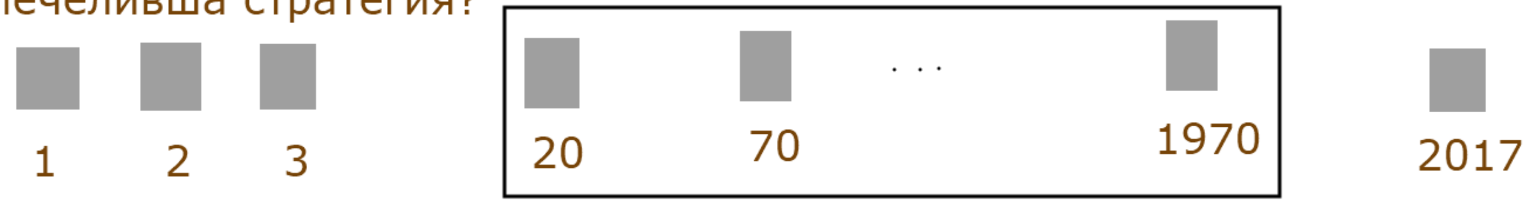
Добро утро! Вие сте на втората лекция от курса "Увод в инвариантите". Започваме в 9:15.

Задачата от вчера:

- 2017 карти, с червената страна нагоре
- Двама играеха игра. Ход: Да обърнат 50 поредни карти, най-лявата от които е с червената страна нагоре.
- Губи този, който не може да направи ход. Кой печели?
- От а) знаем, че играта е крайна.
- б) Има ли някой печеливша стратегия?

Решение на б):



Разглеждаме картите с номера 20, 70, 120, 170, 220, ..., 1970.

Броят на тези карти е (1970-20)/50 + 1 = 40 - четно число. Ключово наблюдение: На всеки ход на първия, броят на картите с червената страна нагоре измежду зададените е четен брой.

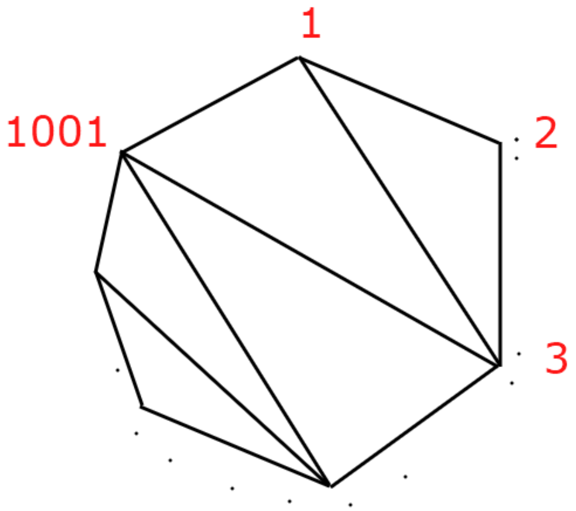
Ключовото наблюдение е вярно, защото картите, посочени на предишната дъска, за на разстояние точно 50, и освен това всеки ход на някой от двамата играчи обръща точно една от посочените карти.

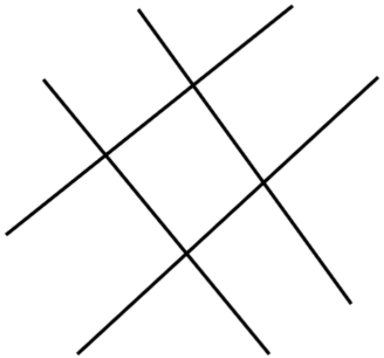
Извод: След всеки ход на първия, броят на гореспоменатите карти, които са с червената си страна нагоре, е нечетен. След всеки ход на втория, броят на гореспоменатите карти, които са с червената си страна нагоре, е четен.

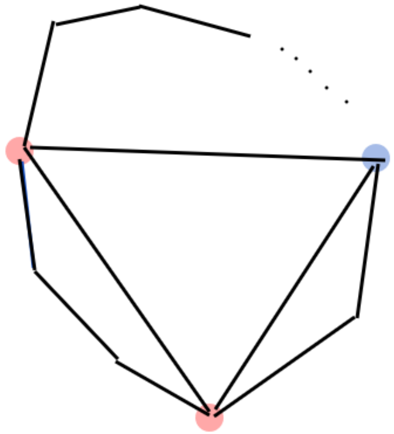
Тогава знаем, че на всеки ход на втория той има нечетен брой отбелязани карти, тоест поне една, които са с червената си страна нагоре. Тогава той винаги може да направи ход. Следователно вторият може да си гарантира победа в играта.

Забележка: В това решение се крие уловка. Ако вторият има пред себе си карти 20, 70, 120, 170, ..., 1920 с бялата страна нагоре, а карта 1970 с червената страна нагоре, той не може да направи ход. Причината за това е, че броят карти между 1970 и 2017 е по-малък от 50. Как можем да коригираме тази неточност?
Предложение: Разглеждаме картите с номера 17, 67, 117, ..., 1917, 1967.

Задача 2. Даден е изпъкнал 1001-ъгълник, чиито върхове са оцветени в три цвята - синьо, жълто, червено, по такъв начин, че никои два последователни върха да не са едноцветни. Да се докаже, че можем да разделим 1001-ъгълника на триъгълници чрез диагонали, никой от които не свързва два едноцветни върха.

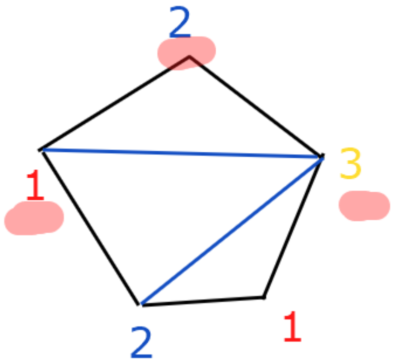






Решение: Да забележим, че в 1001-ъгълника има три последователни върха, които са оцветени в различни цветове. Ще докажем това, допускайки противното.

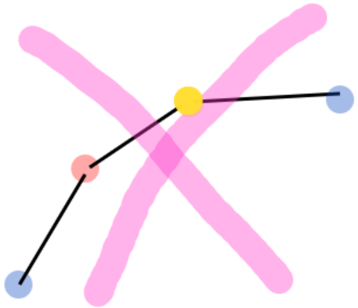
Тогава нека 1 и 2 да бъдат два послеодователни върха, от които един е червен, а другият е син. В този случай върхът след 2 трябва да бъде или червен, или жълт.Но той не трябва да бъде жълт по допускане, следователно трябва да бъде червен.

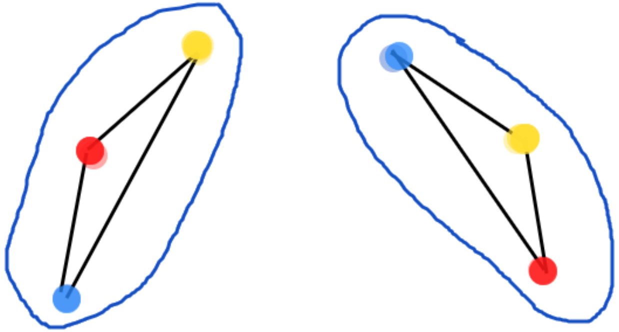


Имаме 1001 върха на разположение, което означава, че не можем да построим оцветяване, в което синьо и червено се редуват и няма нито един жълт връх. Противоречие с допускането, че не съществуват три последователни върха с различни цветове.

Ще разгледаме два случая:
Първи случай: имаме две тройки от последователни върхове на разстояние поне 2, които имат различни цветове.

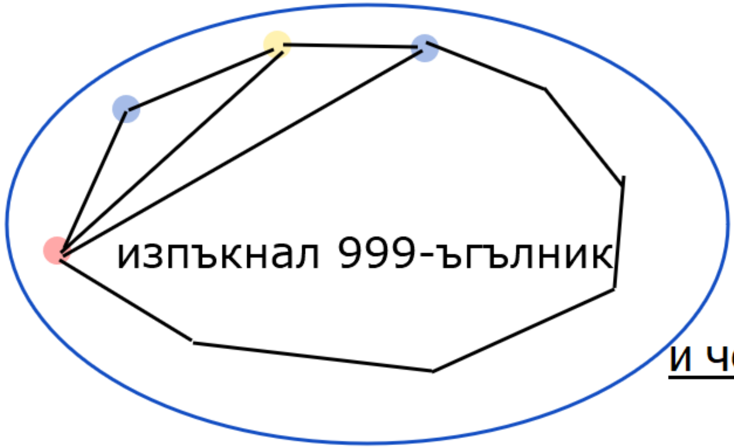
Пояснение: Това означава, че централните върхове във двете тройки не са съседни





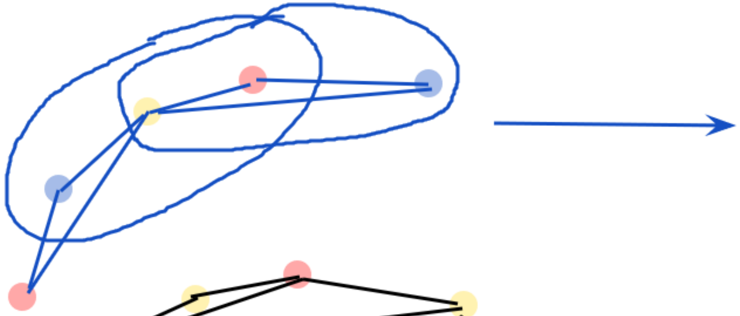
В този случай можем да прекараме два диагонала, които образуват два триъгълника с върхове от различен цвят, и оставаме с изпъкнал 999-ъгълник. По индукция можем да докажем оттук нататък (след като сме разгледали и доказали втория случай), че всеки изпъкнал многоъгълник с нечетен брой върхове, чиито върхове са оцветени в три цвята според условието, има исканото свойство, тоест съществуват диагонали, които свързват върхове с различни цветове и разделят многоъгълника на триъгълници.

Втори случай:

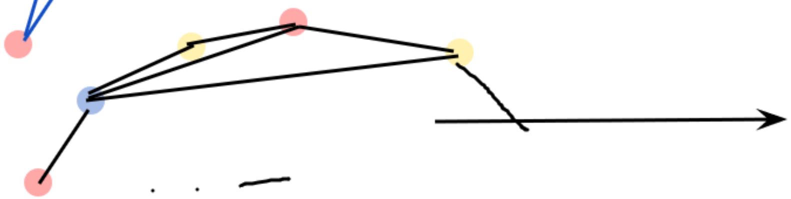


В този случай имаме три върха от различни цветове, които са последвани от четвърти връх, който има същия цвят или като втория, или като първия (виж картинките). В случай, че цветовете на втория и четвъртия връх съвпадат, построяваме два диагонала, както е показано на чертежа, за да сведем задачата до разделяне на 999-ъгълник.

В противен случай, разглеждаме тройката върхове, съставена от втория, третия и четвъртия връх, и повтаряме разсъждението.



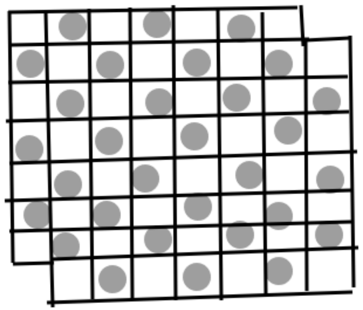
Връщаме се в случай 1.



Отново остава изпъкнал 999-ъгълник.

Упражнение: Използвайки наблюденията, които установихме, решете задачата по индукция с база триъгълник и стъпка, която от твърдението за изпъкнал (2k-1)-ъгълник (тук k е естествено число, по-голямо от 1) доказва твърдението за изпъкнал (2k+1)-ъгълник.

Задача 3: Дадена е дъска 8 на 8, която желаем да покрием с домина. Противник идва и отчупва две противоположни ъглови квадратчета на дъската. Можем ли след отчупването отново да покрием дъската с домина?



Решение: Нека да оцветим дъската шахматно. Броят на черните квадратчета ще бъде 30 (вижте на картинката), а броят на белите квадратчета ще бъде 32. Но всяко домино покрива точно едно бяло и едно черно квадратче. Извод: Не можем да покрием всички квадратчета на дъската с домина.