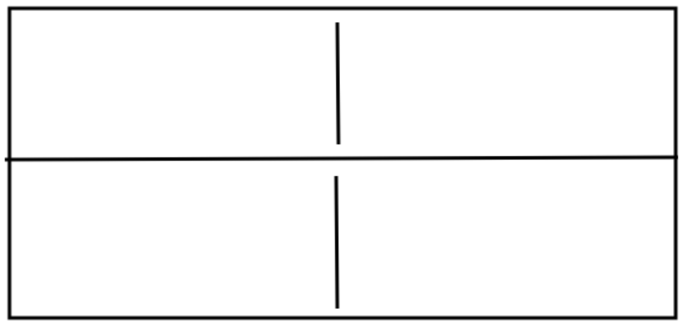
Увод в инвариантите.

Задача 1. Дадена е правоъгълна плочка шоколад $m \times n$. Искаме да разделим плочката на единични парченца. Колко счупвания е необходимо на направим за тази цел?

Решение: Ако $m=1$, имаме плочка $1 \times n$. Тогава имаме нужда от $n-1$. Ако $m=n=2$, тогава ще е необходимо първо счупване, което разделя плочката на две по-малки с измерения 1×2, и в последствие ще са ни нужни още 2 счупвания.



$m \times 1 \to m-1$
$1 \times n \to n-1$
$2 \times 2 \to 3$

$m-1 + m(n-1) = \boxed{mn - 1}$ (предположение)

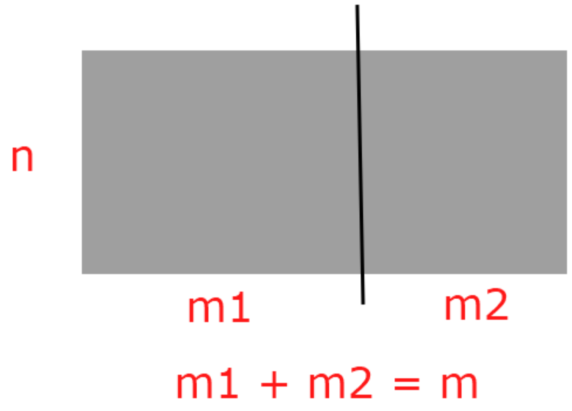
Ще докажем, че се нуждаем от точно толкова счупвания, за да разделим шоколада на малки парченца.

Индукцията ще бъде проведена по сумата на двете измерения m и n. (m+n)
Индукционна база: m=n=1, m+n=2. Имаме една плочка и са необходими точно 1.1-1 = 0 счупвания. (k=2)

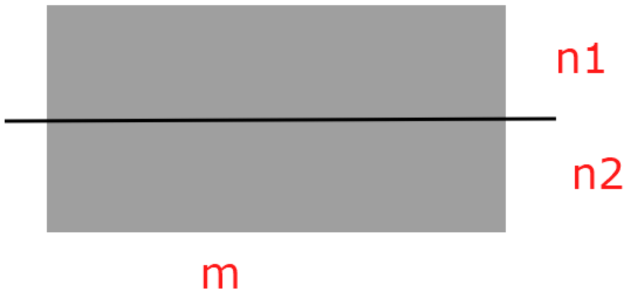
Индукционен преход: Да допуснем, че индукционната хипотеза е изпълнена, когато сумата на m и n е най-много k, където k е зададено число. Нека рагледаме плочка с големина m x n, където m+n = k+1.

Да направим първото счупване. Имаме два случая.

Случай 1: Първото счупване оставя две плочки с измерения m1 x n и m2 x n. Тогава знаем, че тъй като m1 < m, m2 < m, то m1 + n е най-много k и m2 + n е най-много k. Тогава и за двете плочки можем да приложим индукционната хипотеза, която ни казва, че за първата плочка (m1 x n) са необходими m1.n-1 счупвания. Също за втората плочка (m2 x n) знаем, че са необходими точно m2.n-1 счупвания, за да я разделим на единични парченца шоколад.



Общо имаме 1+(m1.n-1)+(m2.n-1) = (m1+m2).n - 1 = m.n -1. Това доказва, че правоъгълната плочка с измерения m и n, за която m+n = k+1, изпълнява условието на индукционната хипотеза. Това завършва индукционният преход в този първи случай.



Втори случай: След първото счупване получаваме две плочки шоколад с измерения m x n1 и m x n2, където n1+n2 = n. Упражнение.

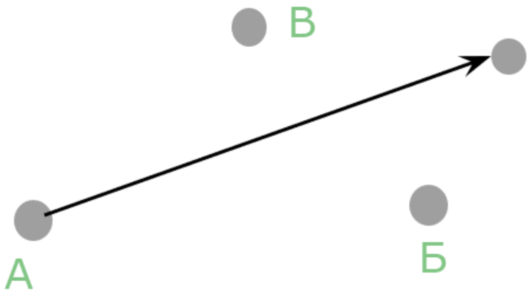
От индукционната хипотеза за k ние заключаваме индукционната хипотеза за k+1. По метод на математическата индукция задачата е решена.

Задача 2: На дъската са написани числата от 1 до 2021. Имаме право да извършваме следната операция: Избираме две числа x и y измежду написаните и на тяхно място записваме |x-y| и изтриваме x и y. На края на дъската остава едно число. Каква е неговата четност? (Четно ли е то, или нечетно?)

Решение:
Инвариант: Броят на нечетните числа на дъската винаги е нечетен.
Защо това е така? Разглеждаме две числа, с които правим зададената операция. Ако и двете са четни, броят на нечетните числа не се променя след операцията. Ако и двете са нечетни, то броят на начетните числа намалява с две след операцията. Ако едно е четно и едно е нечетно, то броят нечетни числа не се променя.

Но в началото той е 2020/2 + 1 = 1010 + 1 = 1011, което е нечетно число. Следователно последното число е нечетно.

Задача 3: На хокейното игрище играч има три шайби с надписи А, Б, В. В началото трите шайби са разположени във формата на триъгълник:



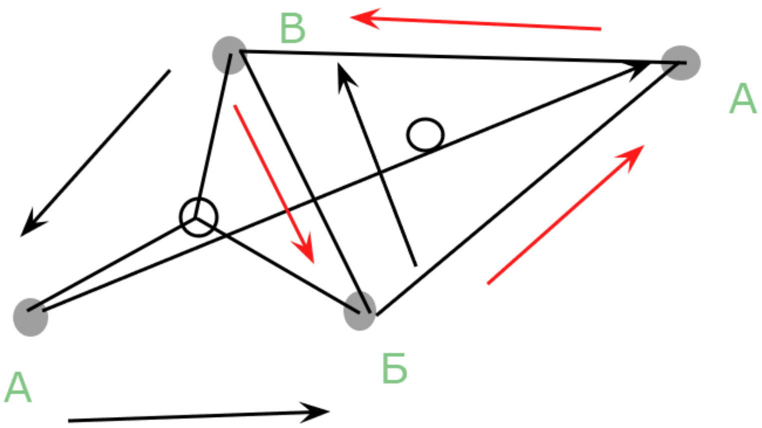
Играчът избира някоя от трите шайби и я удря така, че тя да премине между останалите две.

Може ли шайбите да се върнат по своите места след:

а) 2020 удара на играча? - Да, избираме шайба и я бием 1010 пъти в едната посока и 1010 пъти в другата посока.

б) 2021 удара на играча?

Решение: б) Да разгледаме ориентацията на точките / шайбите А,Б,В на игрището.



На всеки ход цикличният ред (т.е. редът, в който намираме шайбите А,Б,В, въртейки се около точка в триъгълника АБВ) се променя, след четните ходове той е А,Б,В,А,Б,В,.., а след нечетните той е А,В,Б,А,В,Б,..
Извод: След 2021 удара играчът не може да върне всички шайби на началните им позиции.

Преди първия удар: А,Б,В,А,Б,В,А,Б,В ...
След първия удар (преди втория): А,В,Б,А,В,Б,А,В,Б,...
След втория удар: А,Б,В,А,Б,В,А,Б,В,...

Задача 4: Дадени са 2017 карти, всяка от които има една бяла и една червена страна. В началото всички карти са с червената страна нагоре. Двама играят игра. На всеки ход един играч има право да обърне 50 карти, ако най-лявата от тях е с червената си страна нагоре. Губи този, който не може да направи ход.

а) Да се докаже, че играта трябва да свърши след краен брой ходове.

б) Има ли някой от играчите печеливша стратегия?

(на всеки ход трябва да бъдат обърнати точно 50 карти)

Решение: а) Нека напишем на червената страна на всяка карта числото 1, а на бялата - числото 0.

Инвариант: На всеки ход, числото, образувано от дадените 2017 цифри, намалява.

$1\ x_2\ x_3\ x_4 \ldots x_{49} \to 0\ (1-x_2)\ (1-x_3) \ldots (1-x_{49})$. Тъй като най-лявата цифра от 1 става 0, числото намалява. В началото имаме числото 111...1 (2017 цифри, всичките 1).

Тогава, тъй като най-малкото число, което може да бъде записано на дъската, е 000...0 = 0, то броят ходове в играта е не по-голям от първоначално написаното число, т.е. играта е крайна.