

Упражнения по Инварианти - първа част

Упражнение 1. В клетките на таблица $m \times n$ са записани mn реални числа (сред които може да има както положителни, така и отрицателни числа). На всеки ред (съответно стълб) можем да променим знаците на всички числа в този ред (съответно в този стълб). Да се докаже, че можем да извършим промените така, че края сумата от числата във всеки ред и стълб да бъде неотрицателна.

Упражнение 2. На дъската са написани няколко естествени числа. На един ход имаме право да изберем две числа, да ги изтрием и на тяхно място да запишем техния най-голям общ делител и тяхното най-малко общо кратно. Да се докаже, че от един момент нататък числата на дъската ще бъдат едни и същи след всеки ход.

Упражнение 3. В безкрайна квадратната решетка в черно са оцветени 2020 квадратчета, никой две от които нямат общ връх, а останалите са бели. Имаме право да преоцветяваме квадратче, ако поне два от четирите му съседни по страна имат противоположен цвят. Може ли на дъската да се появят 2021 черни квадратчета, никой две от които нямат общ връх?