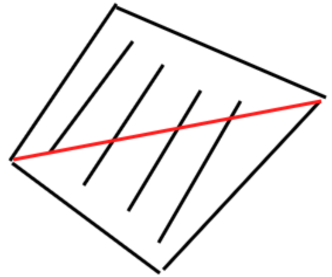
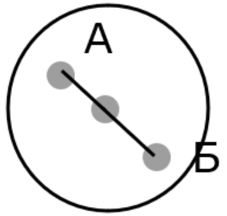
Комбинаторна геометрия I - Теорема на Хели и приложения. Общи задачи. Начало: 11:00.

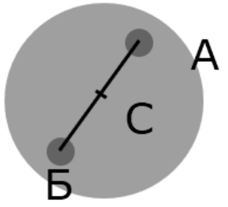
Дефиниция: Работим в равнината. Изпъкнало множество X е множество от точки в равнината, за което за всеки две точки A и B от X и за всяка точка C, лежаща на отсечката между точките A и B имаме, че C също приналдежи на X.

Крайните точки образуват изпъкнал многоъгълник, следователномножеството е изпъкнало



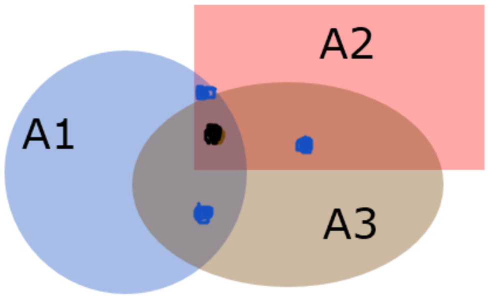
Пример за неизпъкнало множество: Диск без неговия център.





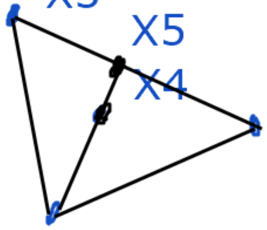
Теорема на Хели: Дадени са изпъкнали множества A1, A2, ..., Ak в равнината. Известно е, че всеки три от тези множества имат непразно сечение (виж картинката).

Забележка: Теоремата се обобщава в пространството. Тогава е известно, че ако всеки четири от множествата A1, A2, ..., Ak имат непразно сечение, то всички множества имат (заедно) непразно сечение.



Първо ще докажем теоремата на Хели по индукция. Ще започнем със лема.

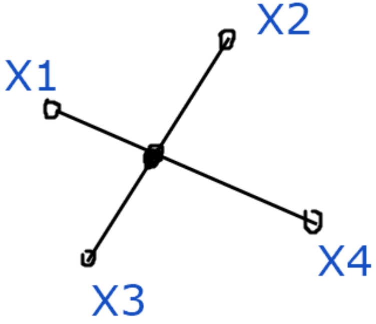
Лема (База на индукцията): Теоремата на Хели е изпълнена в случая k=4.



Решение: Разглеждаме множествата A1, A2, A3 и търсим начин да добавим четвъртото множество (A4).
Първи случай: Нека A1, A2, A3 имат обща точка X4, A1, A2, A4 имат обща точка X3, ...

Нека точката X5 да бъде на отсечката X1X3 и да е такава, че X5, X4 и X2 лежат на една права. Според дефиницията на изпъкнало множество знаем, че, тъй като двете точки X1 и X3 се намират в сечението на множествата A2 и A4, то и X5 се намира в това сечение. Но X2 се намира в множеството A4 (в частност тя е в сечението на A1, A3, A4). Но щом X4 лежи на отсечката между X5 и X2, то тя също принадлежи на A4 (по изпъкналост). Но X4 е дефинирана като пресечна точка от множествата A1, A2, A3 и следователно точката X4 принадлежи на всяко от тях.

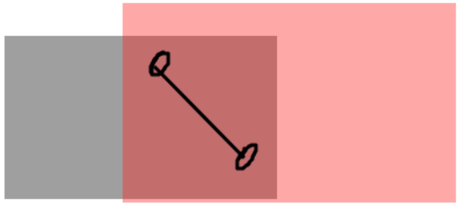
Втори случай: Нито една от точките X1, X2, X3, X4 не лежи в триъгълника, образуван от останалите три. Да разгледаме диагонала X2X3 (на картинката вдясно). Тъй като точките X2 и X3 принадлежат на множествата A1 и A4, които са изпъкнали по условие, то всяка точка от отсечката между X2 и X3 принадлежи на множествата A1 и A4 по изпъкналост. По същата логика отсечката между точките X1 и X4 принадлежи на множествата A2 и A3, и в частност пресечната точка на диагоналите X2X3 и X1X4 принадлежи и на четирите множества.



Да довършим доказателството на класическия вариант на теоремата на Хели по индукция.

Доказателство: Базата за k=4 е OK от лемата.
Индукционен преход: Да допуснем, че теоремата е доказана за k множества, и нека A1, A2, ..., A{k+1} са изпъкнали множества, които изпълняват условието на задачата. Тогава да разглеждаме множествата B1 = A1 пресечено с A{k+1}, B2 = A2 пресечено с A{k+1},..., Bk = Ak пресечено с A{k+1}. Ще докажем, че множествата B1, B2, ..., Bk удовлетворяват условието на задачата.

Забелязваме, че всеки три множества Bi, Bj, Bs имат обща точка, защото според лемата множествата Ai, Aj, As и A{k+1} имат обща точка. Освен това множествата Bi, Bj, Bs са изпъкнали, защото те са сечения на две изпъкнали множества.

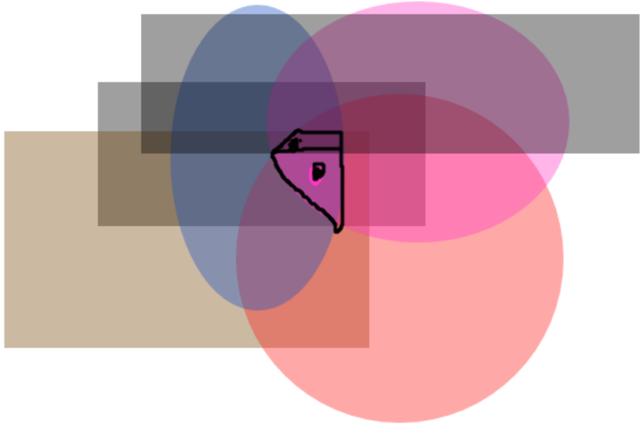


(ако две точки се намират с сечението на две изпъкнали множества, то отсечката между тях се намира изцяло и в едното, и в другото множество)

Оттук заключаваме по индукционна хипотеза за k, че множествата $B_1, B_2, \dots, B_k$ имат обща точка, откъдето следва, че множествата $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ също имат обща точка. Индукционният преход е завършен.

Вариант на теоремата: Същото условие като теоремата на Хели, но броят на множествата е безкраен, всички множества отново са изпъкнали и поне едно от тях е ограничено (съдържа се в окръжност с краен радиус).

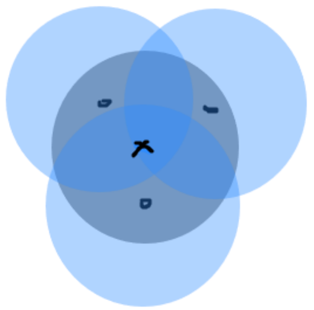
Интуиция зад доказателството (недостъпно засега): A1, A2, A3, ... са множествата и да разгледаме крайната фамилия от множествата A1, A2, ..., Ak за някоеестествено число k. Тогава теоремата на Хели важи и множествата A1, A2, ..., Ak имат обща точка. Когато k расте, сечението на множествата A1, A2, ..., Ak намалява. Оказва се, че това сечение, дори "в безкрайността", не може да бъде празно.



Упражнение: Можете ли да намерите контрапример, когато всяко едно от множествата е неограничено?

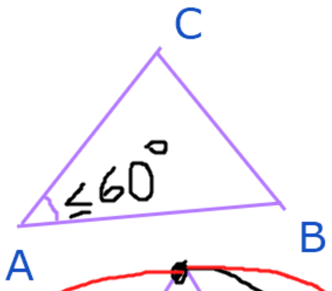
Приложение 1: Дадени са k точки в равнината. Всеки три от тези точки се съдържат в (затворен) диск с радиус 1. Да се докаже, че съществува диск с радиус 1, който съдържа всички k точки от множеството.

Доказателство: Щом всеки три точки се съдържат в диск с радиус 1, то дисковете с радиус 1 около произволни три точки имат непразно сечение (съдържат центъра на първоначалния диск). Тогава дисковете с радиус 1 и центрове дадените точки удовлетворяват условието на теоремата на Хели. Тогава всички дискове с центрове зададените точки и радиус 1 имат обща точка X. Следователно дискът с център X и радиус 1 ще съдържа всичките k точки.

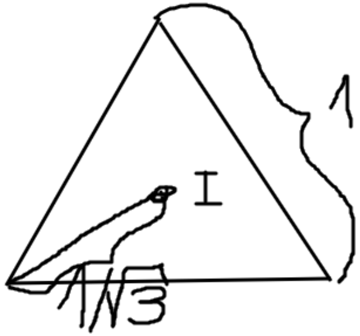


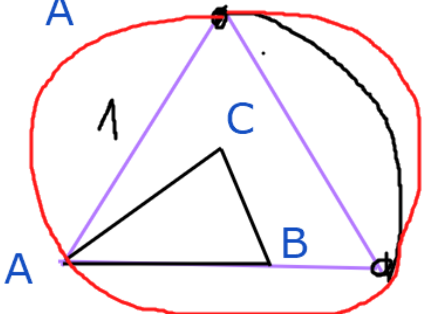
Приложение 2: Зададени са k точки в равнината, такива че всеки две от тях са на разстояние най-много 1. Да се докаже, че всички точки се съдържат в диск с радиус $1/\sqrt{3}$.

Доказателство: Да разгледаме три точки A,B,C от зададените.



Ъгълът срещу най-малката страна в триъгълника ABC е най-малък от трите ъгъла, и в частност е по-малък от 60 градуса. Нека без ограничение на общността да допуснем, че BC е най-малката страна.





Извод: Можем да поместим триъгълникът ABC в равностранен триъгълник със страна 1 (плюс още нещо - трябва да добавим сектора с център A и радиус 1, който съдържа равностранния триъгълник.)

Упражнение: Докажете, че дискът с контур описаната окръжност около равностранния триъгълник, в който (+ сектора с център А и радиус 1) поместихме триъгълник ABC, съдържа и трите точки. Оттам заключете както в предишната задача.