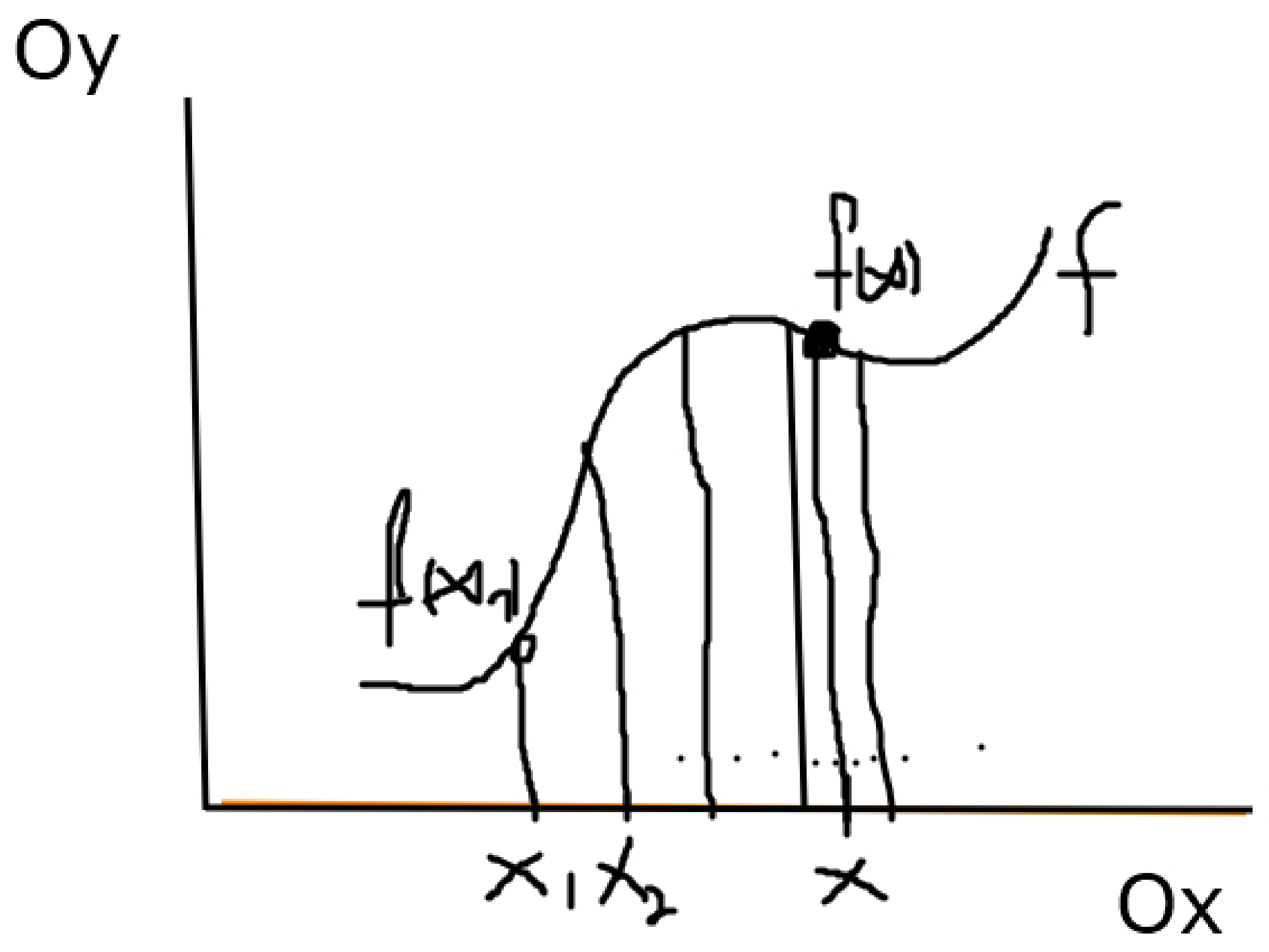
Здравейте! Вие сте на първата лекция по Комбинаторна Геометрия за група 3. Начален час: 14:15.

Борсук-Улам и приложения

Дадена е функция f: I -> R. За конкретика избираме I = [0,1]. Нека x е точка в I. Тогава казваме, че функцията f е непрекъсната в точката x, ако за всяка редица от точки x1, x2, ..., такава че xn -> x (точките x1, x2, ... са позиционирани все по близо до точката x така, че дистанцията между xn и x намалява до 0) имаме, че f(xn) -> f(x).



Ако функцията f е непрекъсната във всяка точка от интервала I, то f е непрекъсната над I.

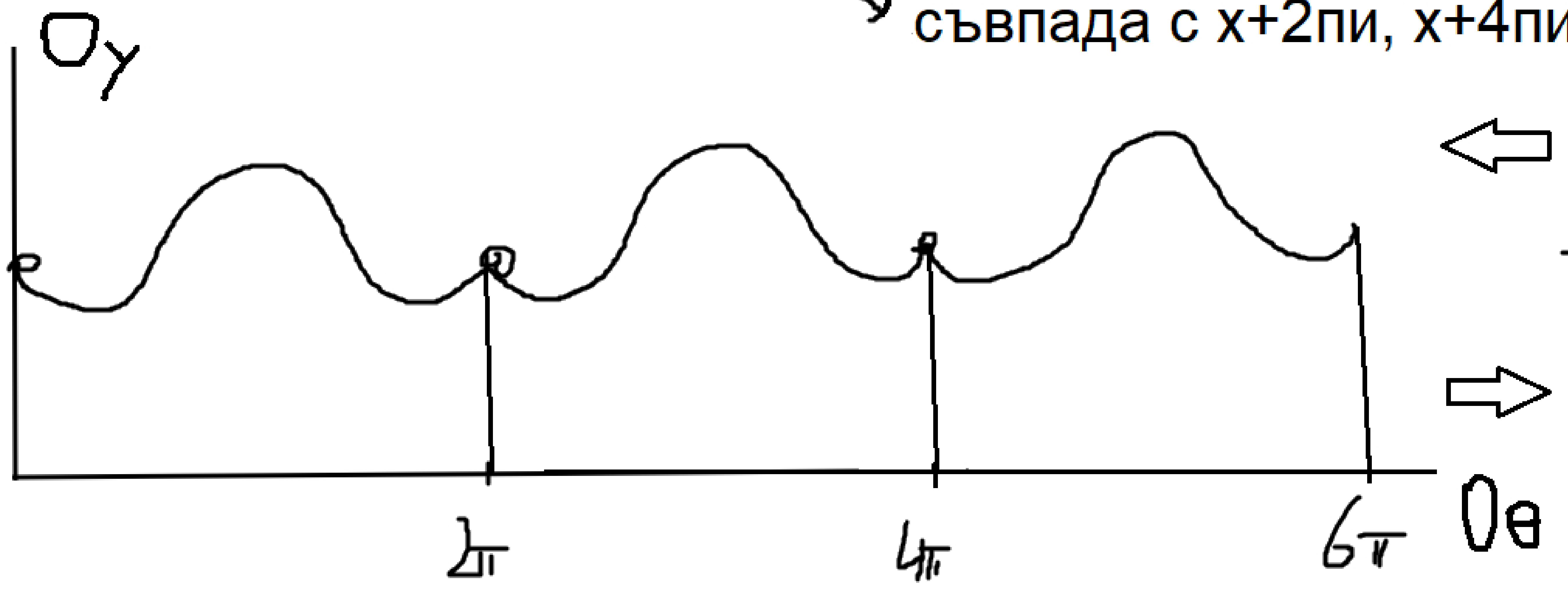
<u>Теорема на Борсук-Улам в равнината (частен случай на теоремата на Рол):</u>

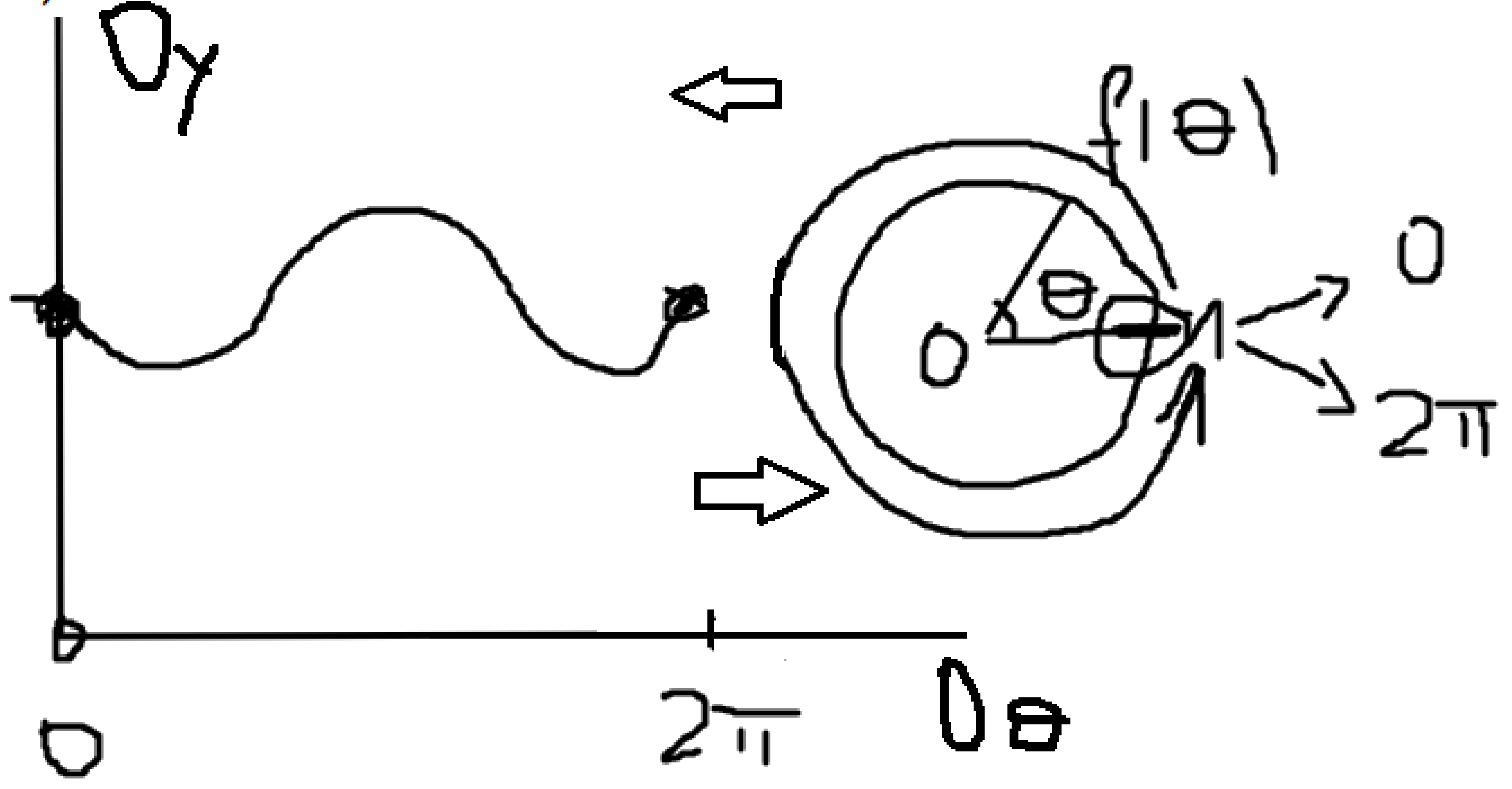
Дадена е функция f, която е непрекъсната над единичната окръжност. (U -единичната окръжност)

Тогава съществува <u>точка t в U, за която</u> f(t) = f(-t).

Доказателство: Разглеждаме помощната фукция g: U -> R. дефинирана като g(x) = f(x)-f(x+pi).

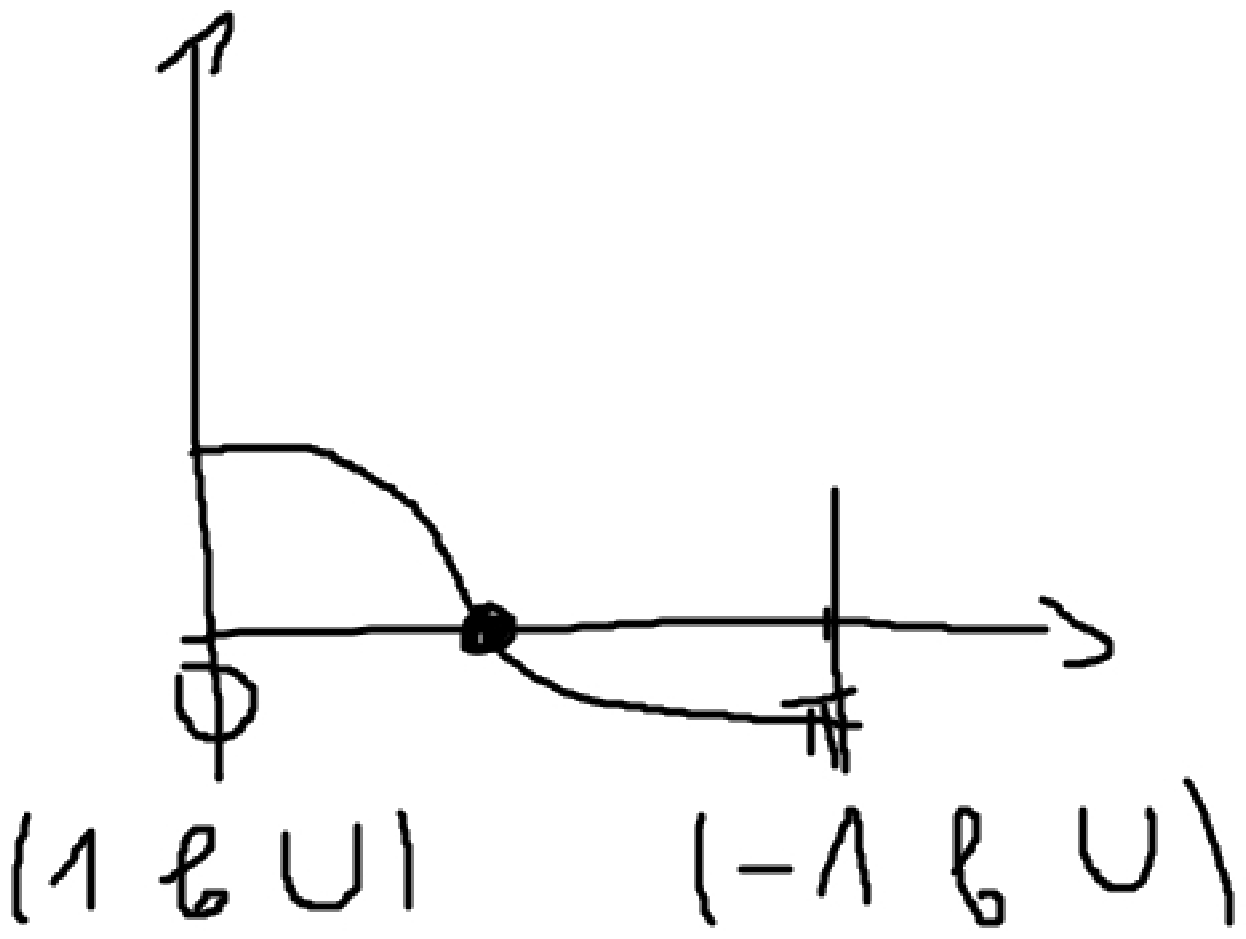
съвпада с x+2пи, x+4пи, ...





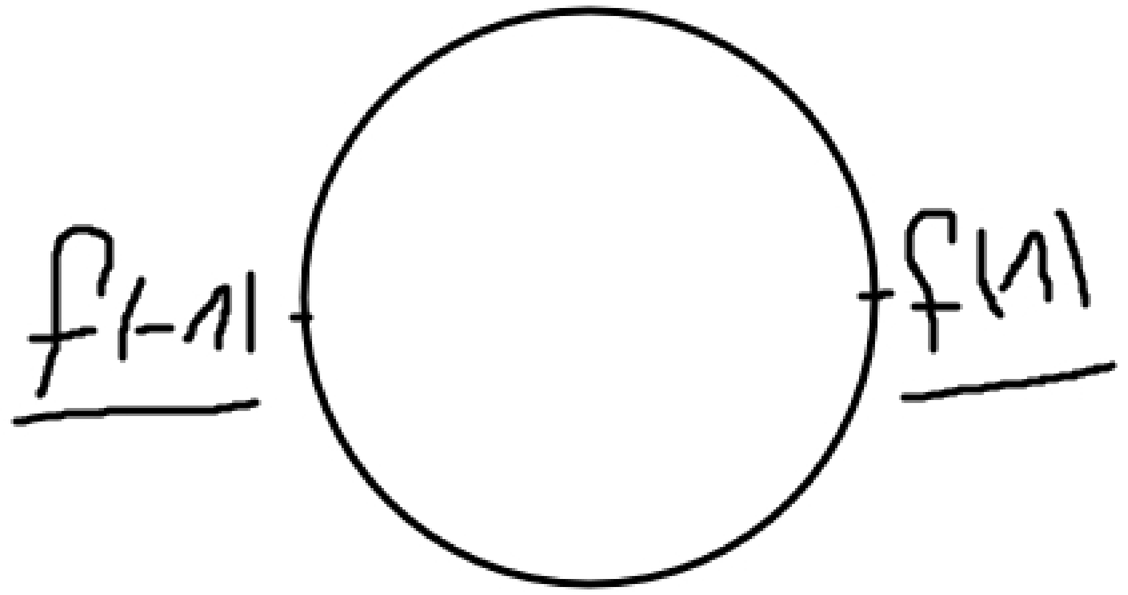
Разглеждаме $g(1)$. Ако $g(1)=0$, сме готови.

Ако $g(1) > 0$, то $g(-1) < 0$ ($g(1) = f(1)-f(-1) = -(f(-1)-f(1)) = -g(-1)$.)

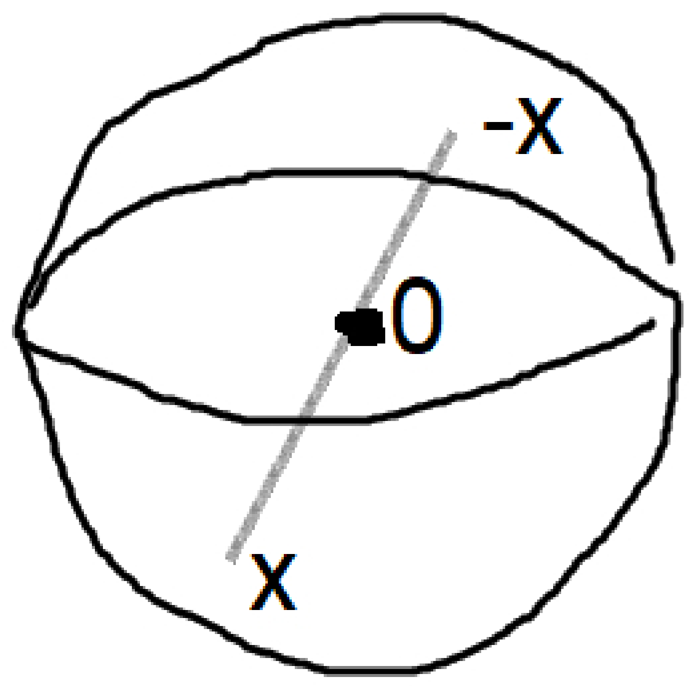


Има стойност между 1 и -1 по единичната окръжност (това съответства на точка между 0 и пи по реалната ос), в която $g(x) = 0$. Тогава $f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(-x)$.

Ако $g(1) < 0$, то $g(-1) > 0$, този случай е аналогичен на втория, избирайки $-g$ вместо g.

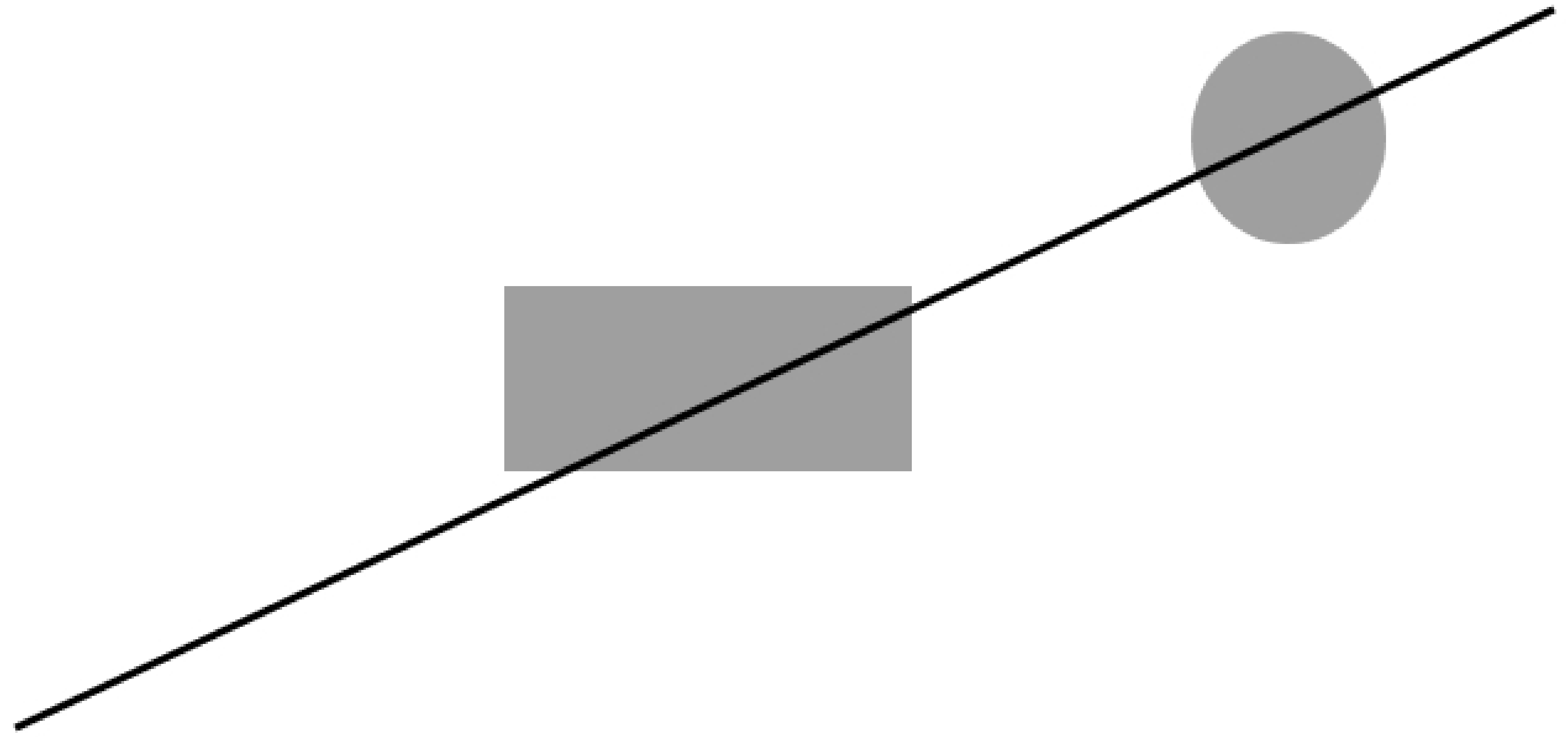


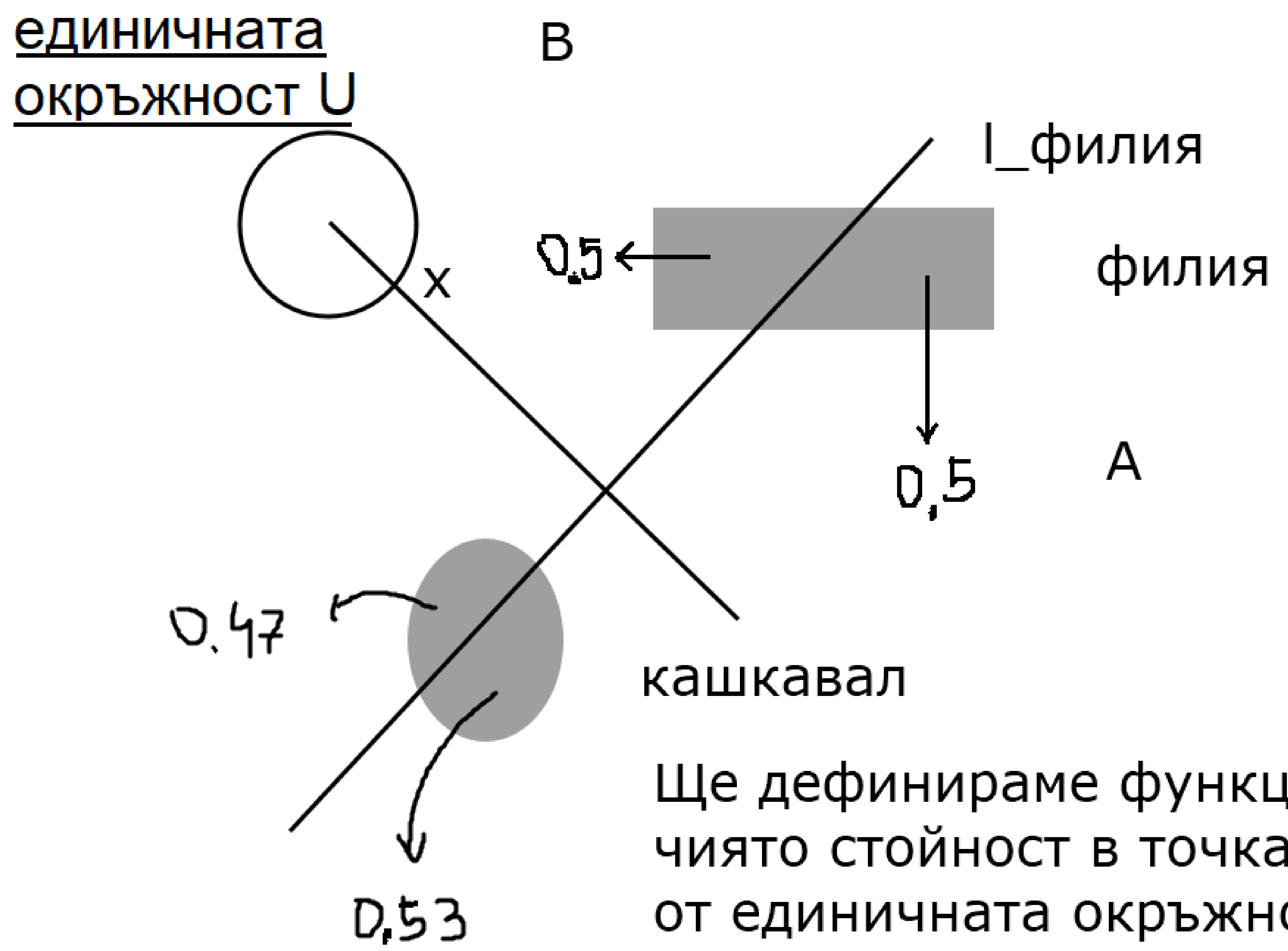
Теоремата на Борсук-Улам над единичната окръжност е еквивалентна на теоремата на Рол. Тази теорема има по-сложна версия в пространството.



В пространството, теоремата на Борсук-Улам ни казва, че за всяка непрекъсната функция f от сферата към равнината (R^2) има точка в сферата, за която f(x) = f(-x). Забележка: f(x) = (f1(x), f2(x)), където f1, f2: сферата -> R <u>са непрекъснати функции</u>.

Приложение 1: Теоремата за филията и кашкавала
Двама гладни ученици искат да споделят двуизмерна филия и двуизмерен кашкавал, като и от двете искат поравно. Да се докаже, че можем да удовлетворим желанието им, разрязвайки равнината на две части с една права.

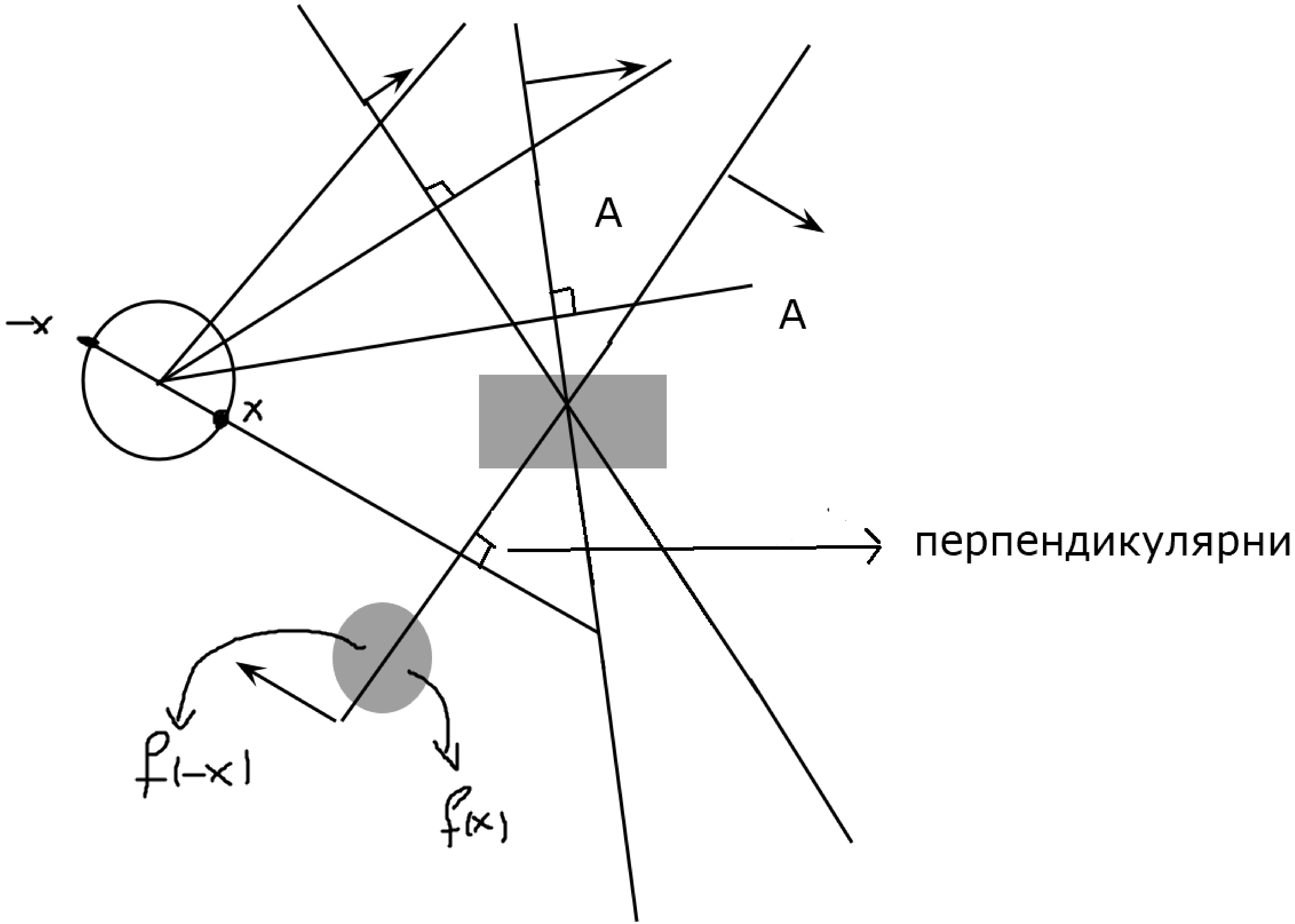




в примера f(x) = 0.53

Ще дефинираме функция f, чиято стойност в точката x от единичната окръжност е зададена от пропорцията на кашкавала в една от двете полуравнини.

Ако приемем, че тази функция f е непрекъсната, то прилагайки теоремата на Борсук-Улам в равнината ние знаем, че съществува x в U, за която f(x) = f(-x) = f(x+pi).



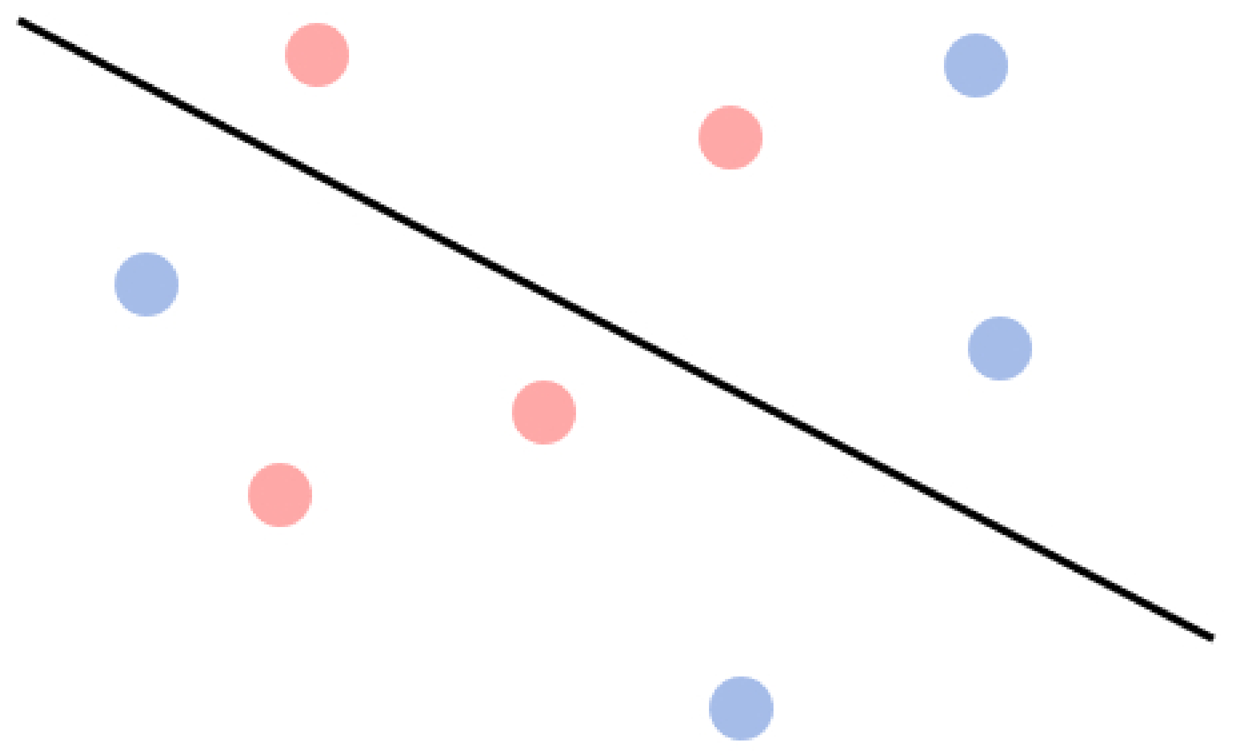
A
A
-x
x
перпендикулярни
f(-x)
f(x)

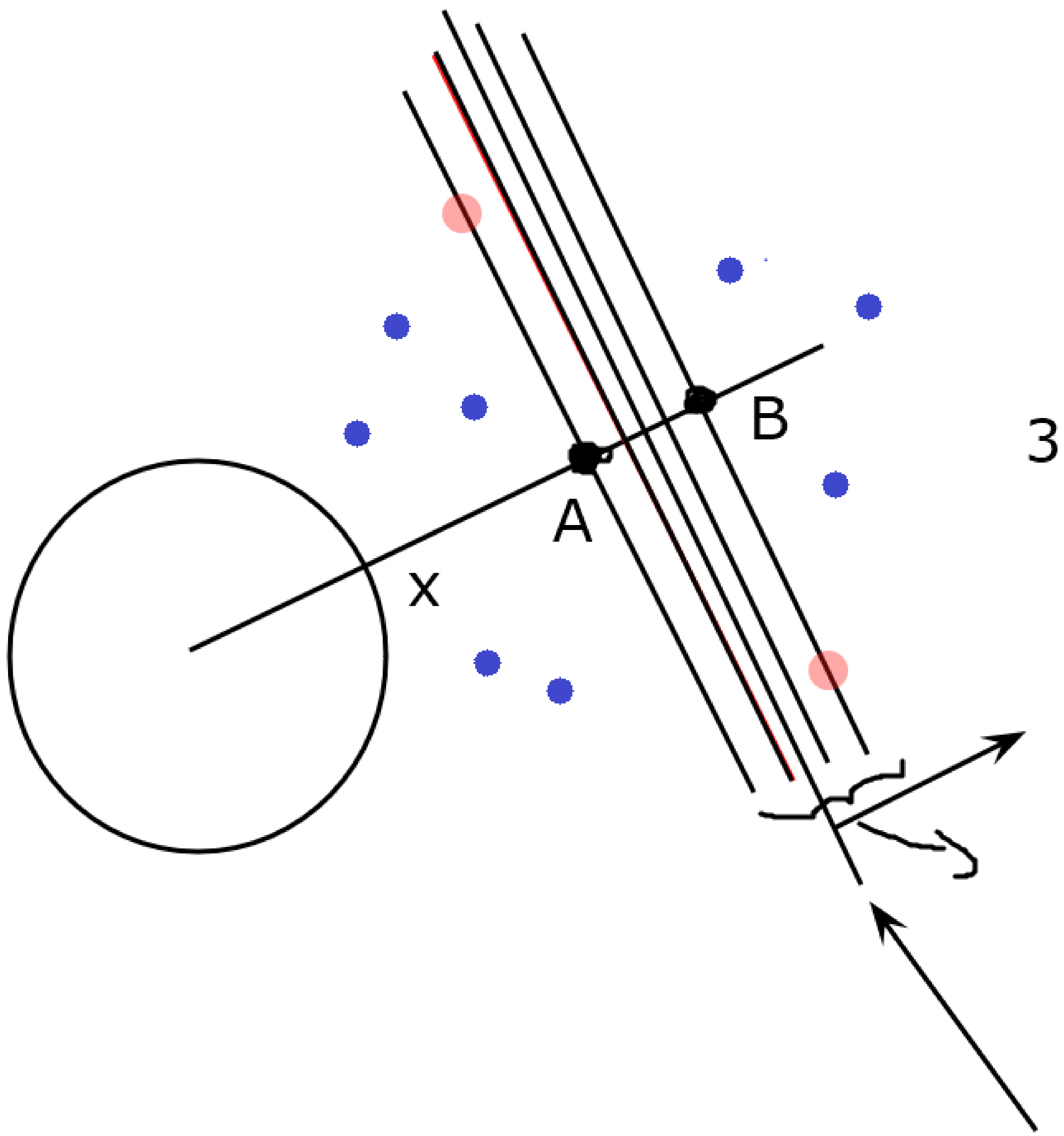
Полуравнината А, чрез която дефинирахме функцията f, се завърта с точката x и когато достигнем -x, то двете полуравнини, отделени от правата, перпендикулярна на направлението на x и разделящи филията на половина, ще са разменили местата си.

$f(x) = f(-x)$ означава, че правата, перпендикулярна на направлението, зададено от точката x, разделя кашкавала на две равни части. Това решава задачата.

Два въпроса: Защо функцията f е непрекъсната? Докажете, че филията и кашкавала не са задължително "цели" т.е. всяко от тях може да бъде разделено на няколко части.

Приложение 2: Зададени са n точки в равнината в общо положение, като някои от тях са сини, а останалите са червени. Освен това, броят на сините точки е четен, броят на червените също. Да се докаже, че съществува права, която да раздели двете множества така, че броят на сините точки от едната страна е равен на броят на сините точки от другата страна и същото важи за броят на червените точки.



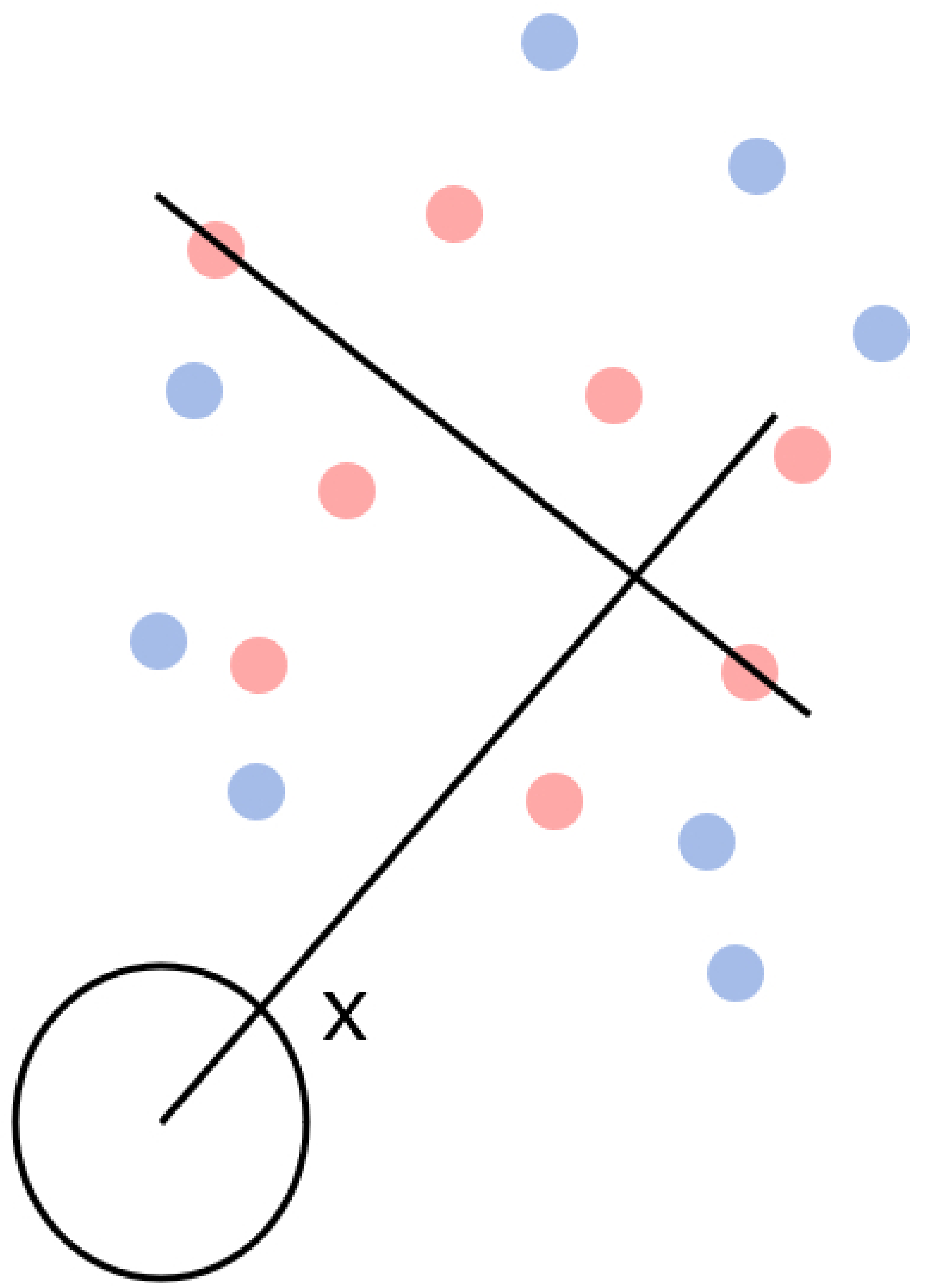


3 сини => f(x) = 3.

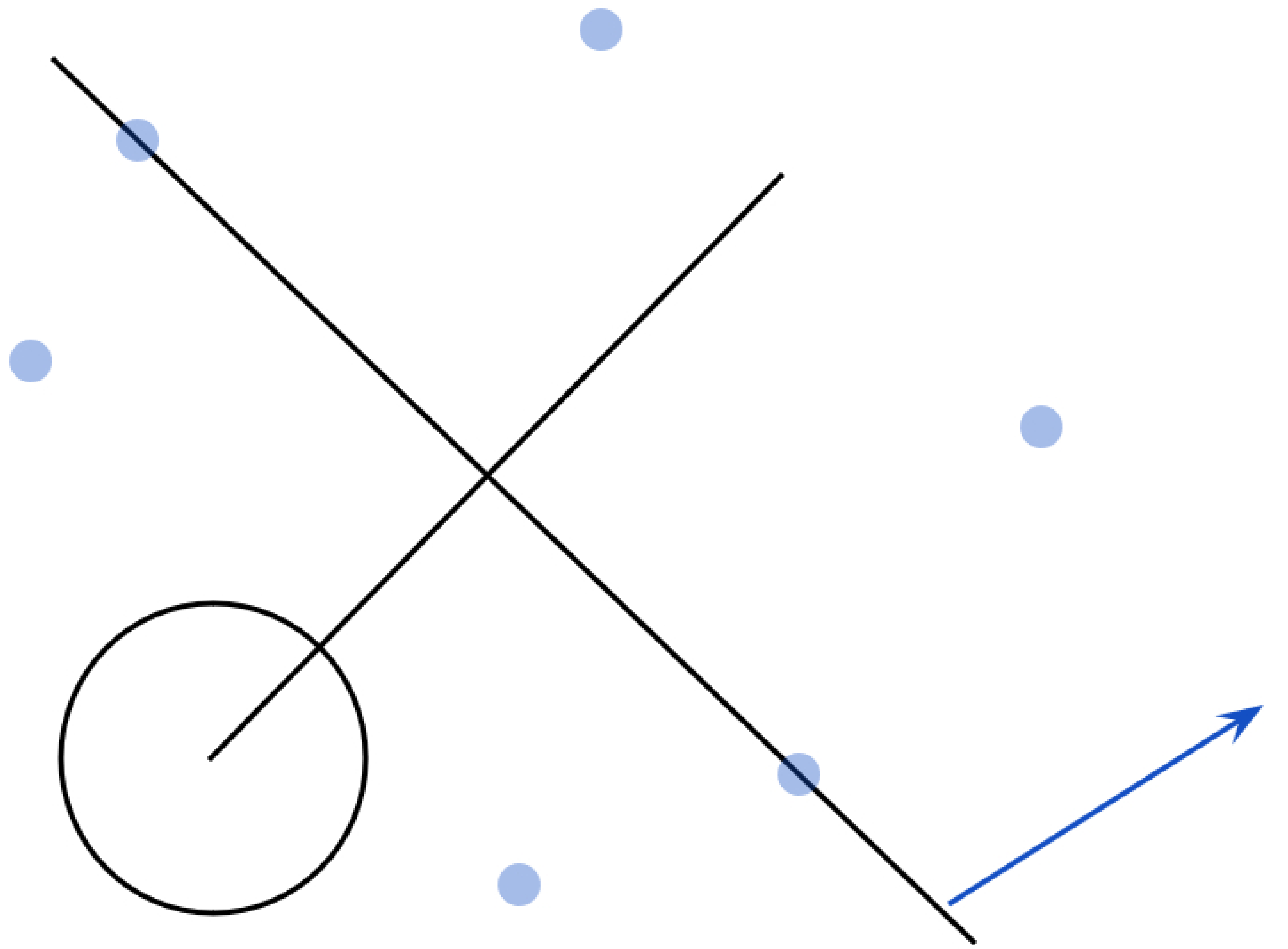
Ако имаме повече от един избор, избираме права, която разделя червените на две равни части и нейната пресечна точка с правата, зададена от точката x над U, е по средата между A и B. (т.е. симетралата на AB)

Нашата функция f ще бъде дефинирана като броят на сините точки в една от двете полуравнини, която фиксираме и придвижваме заедно с точката x.

!!! Възможно е правата, перпендикулярна на направлението на x <u>и разделяща червените точки поравно</u> да бъде единствена.



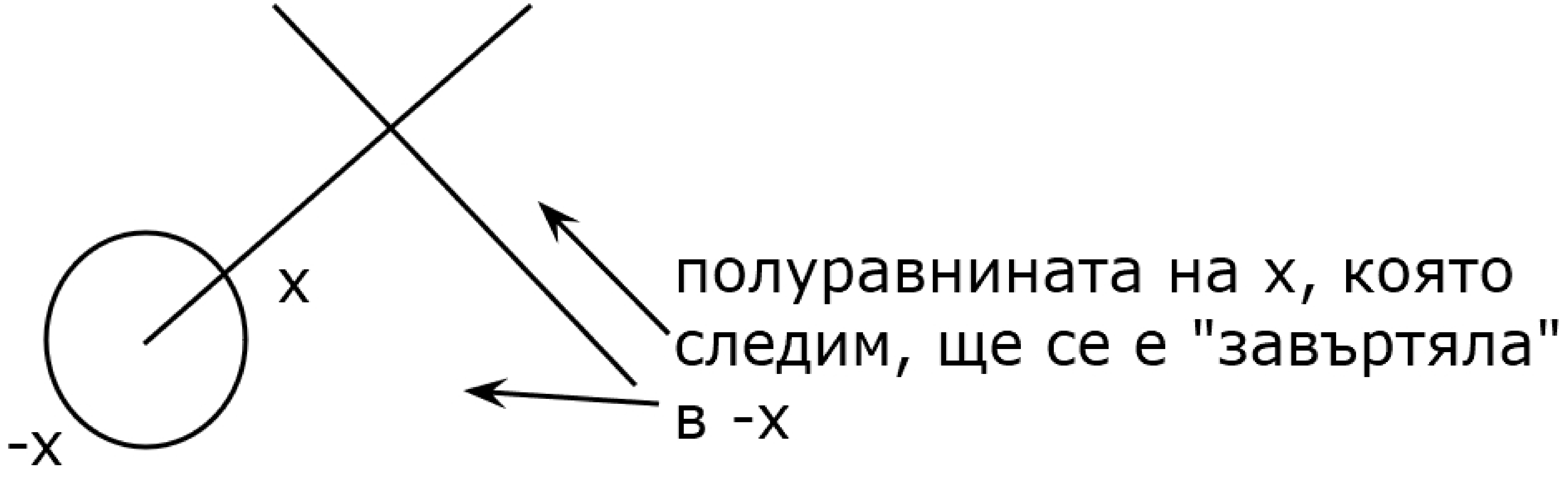
Ключово наблюдение: функцията f не се променя с повече от 1 наведнъж.



Две половинки от сините точки са в една и съща полуравнина, а двете останали половинки - в другата. Тази модификация правим само ако има ~~две сини~~ поне една синя точка ~~точки~~ върху правата.

Щом функцията f се променя с най-много 1, то можем да приложим трика от непрекъснатия случай, разглеждайки функцията $g(x) = (f(x)-f(-x))/2$. Тогава ще можем да заключим, че съществуват две точки $(x, -x)$ на единичната окръжност, за които $f(x) = f(-x)$. Тогава полуравнините, определени от "критичната" права (тази, която разделя червените на две, определена преди малко) ще бъдат разменени за x и за $-x$.

Тогава критичната права за x разполовява и червените точки, и сините точки (поради равенството на f).

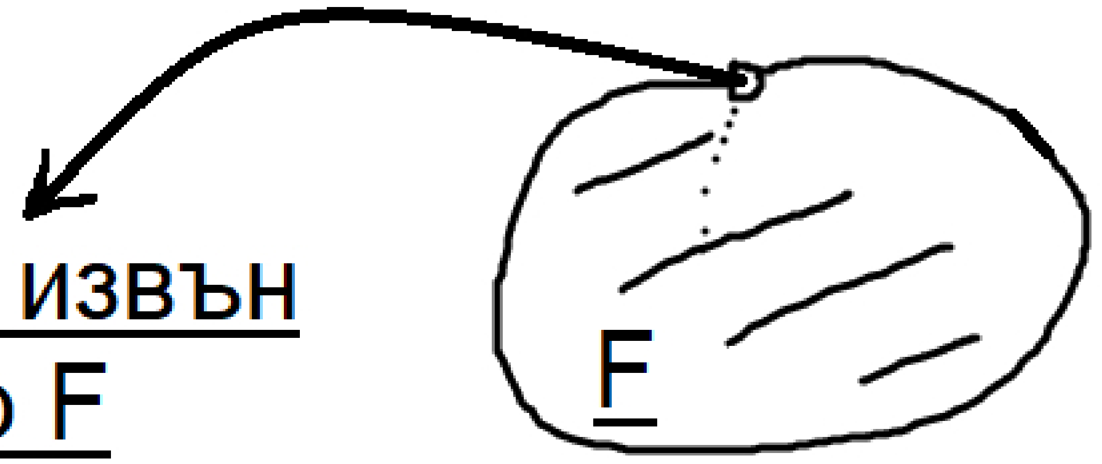


Приложение на Теоремата на Борсук-Улам в пространството: Зададени са затворени множества F1, F2, F3, които покриват единичната сфера. Да се докаже, че за някое от тях е вярно, че Fi и -Fi имат обща точка.

<u>Интуиция:</u> Затворено множество F е такова, което "включва в себе си" контура между F и единичната сфера - F.

Едно множество е затворено, ако лимитът на произволна редица от негови елементи, която е сходяща, се намира вътре в множеството.

<u>Тази точка е извън множеството F</u>



това множество не е затворено

Решение: Ще разгледаме функцията от единичната сфера към R^2, зададена като f: x -> (d(x, F1), d(x, F2)).

Защо функцията f е непрекъсната?

По теоремата на Борсук-Улам знаем, че съществува точка x, за която f(x) = f(-x). Тогава или d(x, F1) = d(-x, F1) = 0 (OK, защото x принадлежи на -F1.), или d(x, F2) = d(-x, F2) = 0 (OK, защото x принадлежи на -F2.), или d(x, F1) > 0 и d(x, F2) > 0. Тогава, щом F1, F2, F3 покриват единичната сфера, то x и -x са във F3, т.е. F3 и -F3 се пресичат в x.

разстоянието от x до множеството F2

<u>Забележка: d(x,F) означава разстоянието от точката x до множеството F.</u>