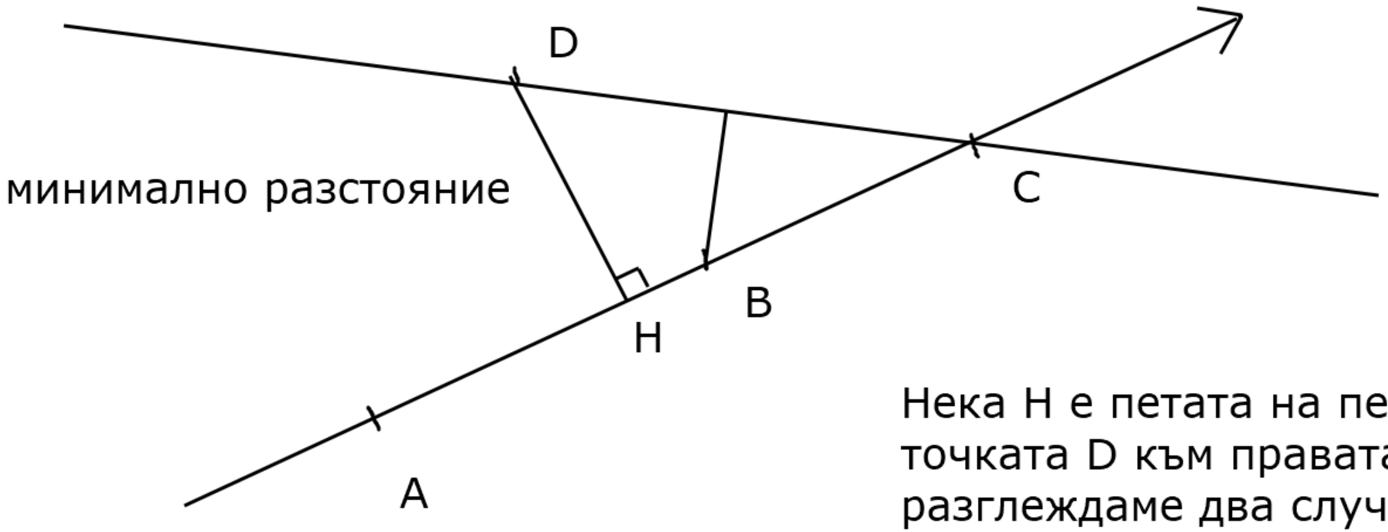
Здравейте! Вие сте на втората лекция по Комбинаторна Геометрия на група 3. Начален час: 9:15.

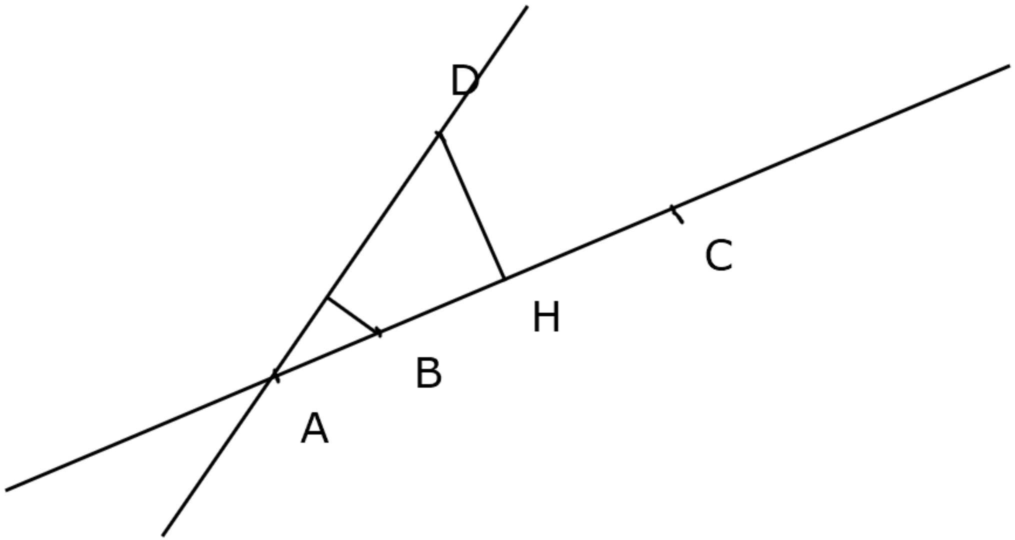
Тема на лекцията: Теореми на Силвестър и Моцкин-Рабин. Общи задачи.

Теорема на Силвестър: Дадени са n точки в равнината със свойството, че на правата, определена от всеки две от тях, лежи и трета точка от даденото множество. Тогава всички точки лежат на една права.

Решение: Да допуснем противното. Тогава съществува двойка (точка D, права ABC) такива, че D не лежи на правата ABC и разстоянието от точката D до правата ABC е минимално.



Нека H е петата на перпендикуляра от точката D към правата ABC. Тогава разглеждаме два случая. Първи случай: Точката H се намира преди B на правата ABC. Тогава разстоянието от точката B до правата CD ще бъде по-малко от DH. Противоречие.

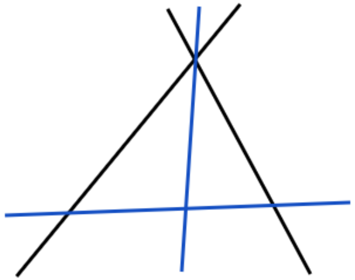
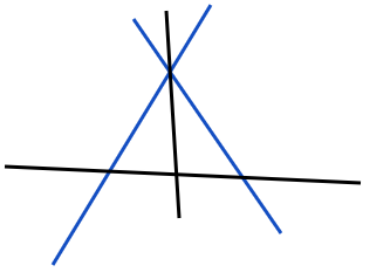


Втори случай: B се намира преди H върху правата ABC. Тогава разстоянието от B до правата AD е по-малко от DH. Противоречие.

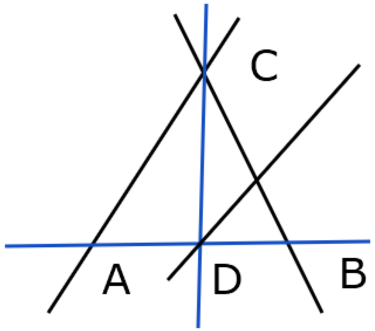
Теорема на Моцкин-Рабин: Дадени са n точки в равнината в два цвята - сини и черни. За всеки две сини точки, правата, определена от тях, минава през поне една черна точка, и за всеки две черни точки, правата, определена от тях, минава през поне една синя точка. Тогава всички точки лежат на една права.

Лема: Не съществува конфигурация n прави в равнината, всяка от тях оцветена в синьо или черно, за които:

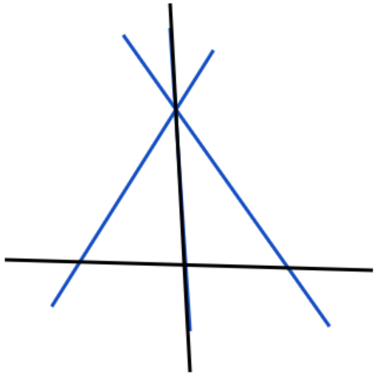
1) За всеки две сини прави има черна, която минава през пресечната точка на двете сини. За всеки две черни прави има синя, която минава през пресечната точка на двете черни.

2) Съществува конфигурация от следния тип:  или 

Доказателство на лемата: Да допуснем, че такава конфигурация съществува. Тогава, нека разгледаме най-малкият триъгълник ABC от следния вид:



или



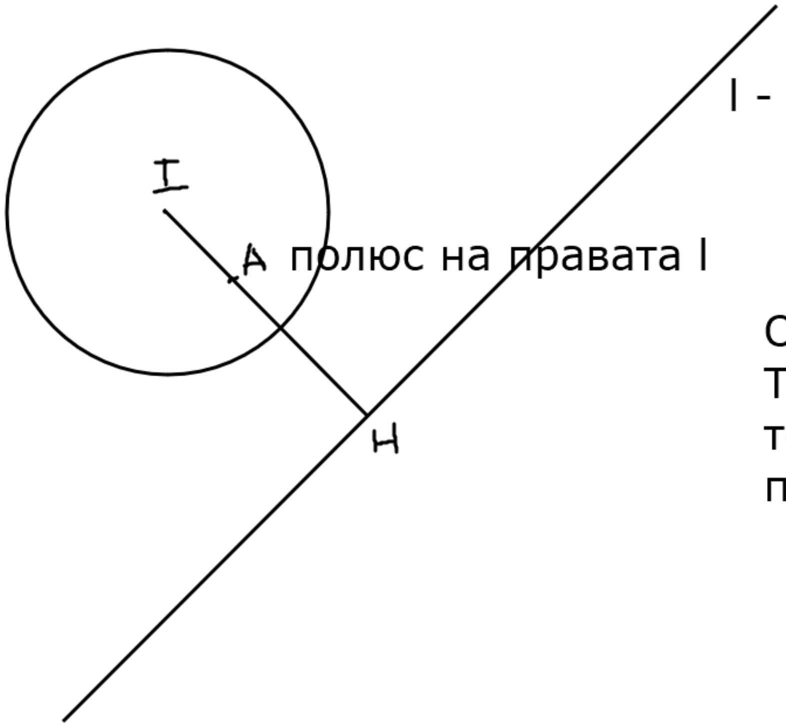
(триъгълник ABC е с минимално лице)

Тогава нека D е точката, пресечна за двете сини в първия случай и на двете черни във втория случай. По условие има черна права (случай 1) и синя права (случай 2), която минава през D. Това означава, че един от триъгълниците DBC и ADC е от горепосочения вид и има по-малко лице от това на ABC. Противоречие.

Как да сведем теоремата до лемата?

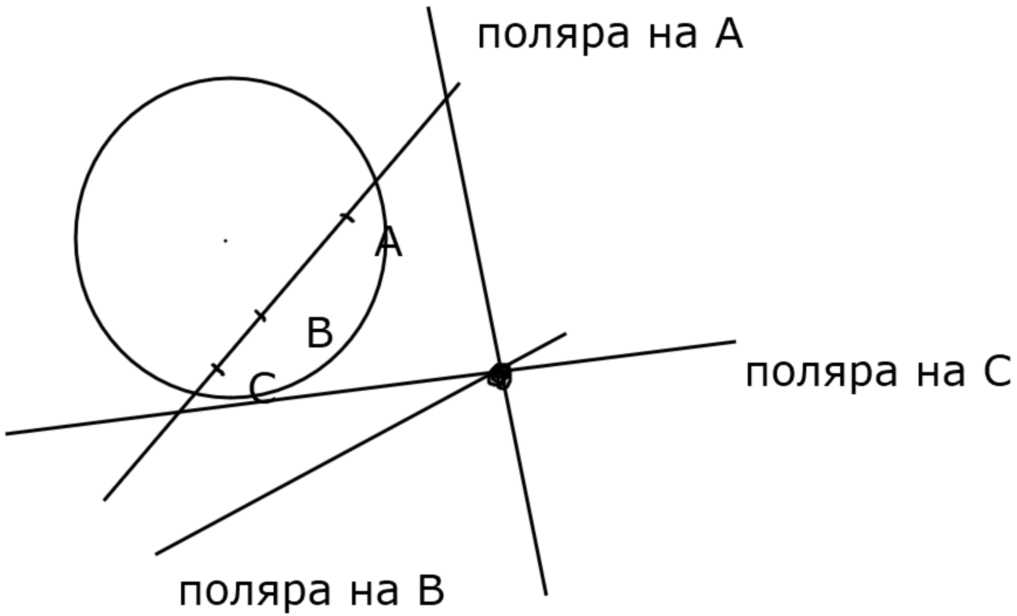
$IA.IH = r^2$.

l - поляра на точката A



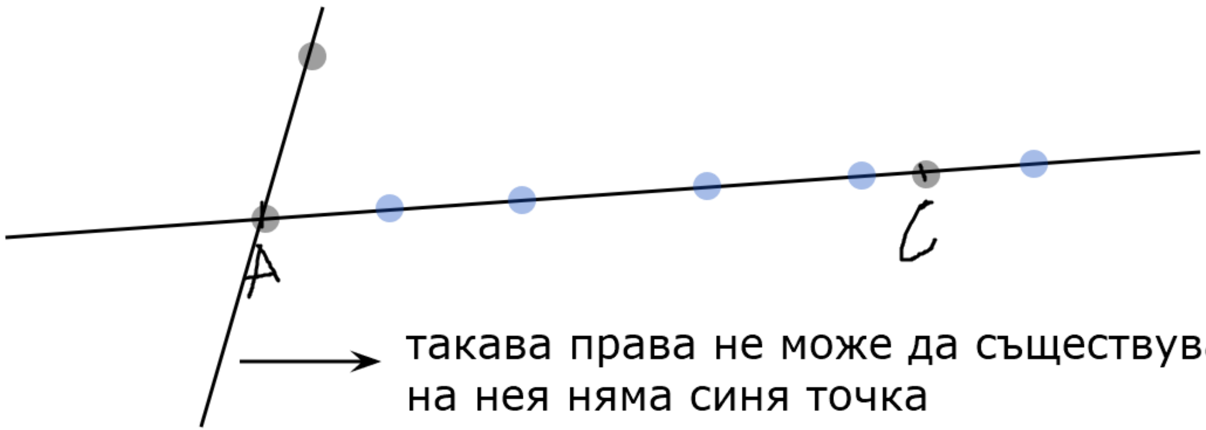
полюс на правата l

Основно свойство на полюса и полярата:
Три точки (полюса) лежат на една права тогава и само тогава, когато техните съответни прави (полярите им) се пресичат в една точка.


поляра на A
A
B
C
поляра на C
поляра на B

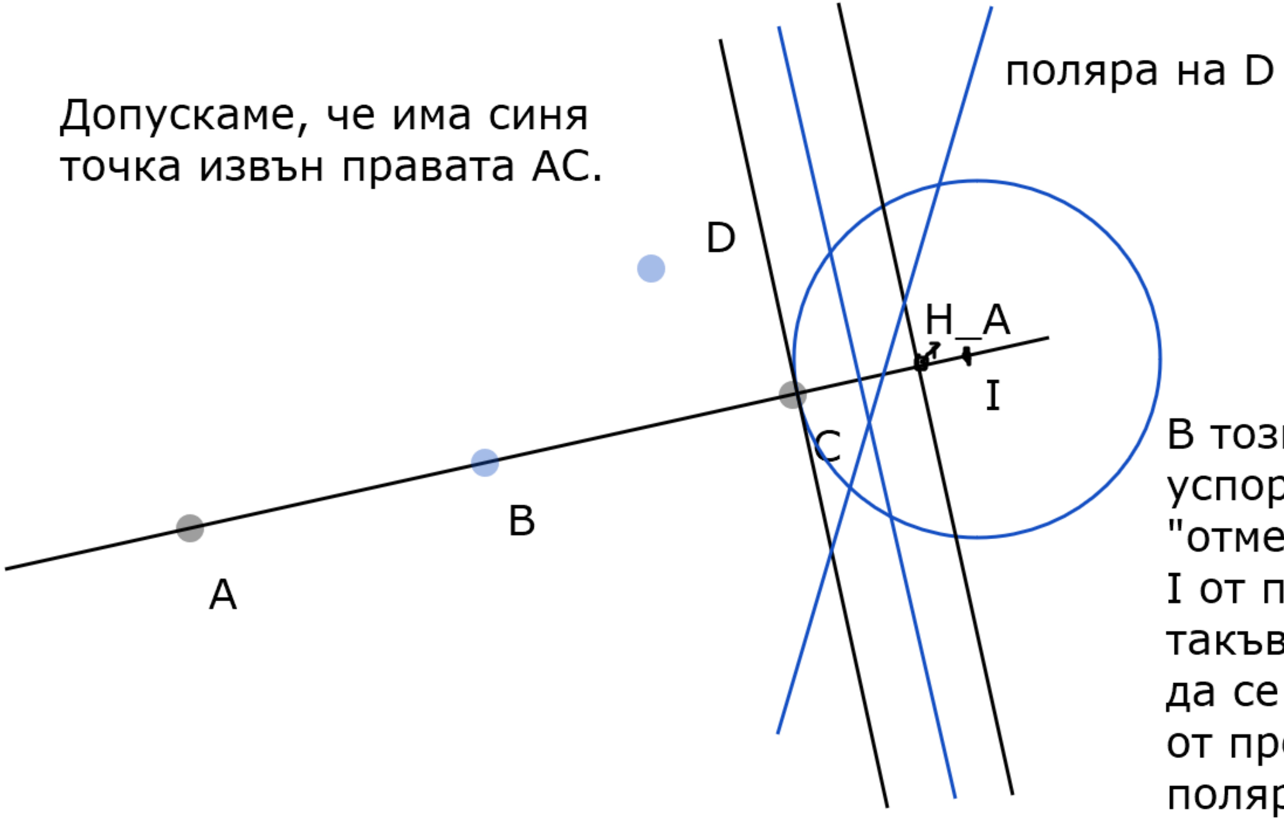
Доказателство на теоремата на Моцкин-Рабин: Да допуснем противното. Тогава съществуват точки A,B,C на една права, така че две от тях са (без ограничение на общността) черни, а третата е синя. Два случая:

1) Централната точка (B) е синя. Ако всички сини точки са върху правата ABC, то тогава и всички четни точки са там.



такава права не може да съществува, на нея няма синя точка

Допускаме, че има синя точка извън правата AC.



В този случай полярите на A,B,C са успоредни прави. Достатъчно е да "отместим" центъра на окръжността I от правата ABC "съвсем малко" по такъв начин, че полярите на A,B,C да се пресичат в една точка, далеч от пресечни точки на тези поляри с полярата на D.

Това ще сформира триъгълник с две черни, една синя страна и една синя права, която го разделя на две части. Благодарение на основното свойство на полюса и полярата първото условие на лемата също е удовлетворено.

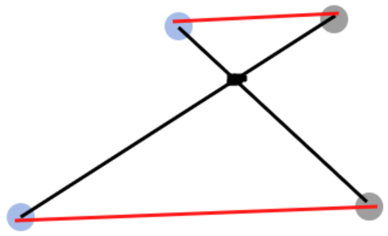
Това е противоречие с допускането. "Първият случай" на Теоремата на Моцкин-Рабин е ОК.

Останалият случай - упражнение. (Идеята е същата)

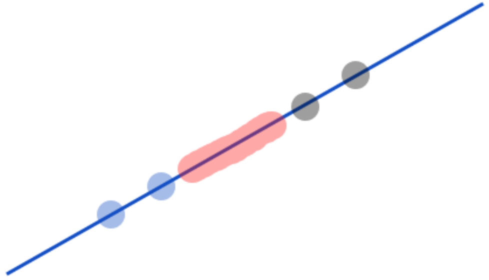
С това теоремата е доказана.

Задача 3. Дадени са n сини точки и n черни точки в равнината. Да се докаже, че точките могат да бъдат разделени по двойки (синя, черна) така, че свързвайки всяка двойка с отсечки води до конфигурация, в която никои две отсечки не се пресичат.

Решение: Да разгледаме разделянето по двойки по такъв начин, че сумата от дължините на n-те отсечки да е минималната възможна. Да допуснем, че някои от тях се пресичат.



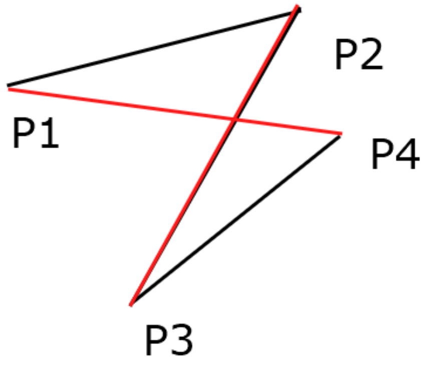
Забележка: Тези точки са в общо положение. Иначе



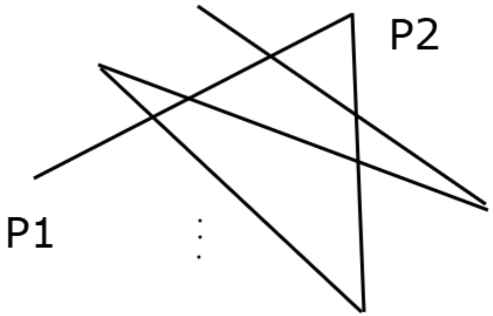
Тогава по неравенство на триъгълника знаем, че можем да заменим двете пресичащи се отсечки с две други с по-малка сума на дължините - противоречие.

Задача 4. Зададени са n точки P1,P2,..,Pn в равнината, така че за всяка двойка от точки Pi,Pj имаме, че PiPj е с дължина най-много 1 и тези отсечки, които са с дължина 1, са точно P1P2, P2P3,.., PnP1. Да се докаже, че n=2 или n е нечетно.

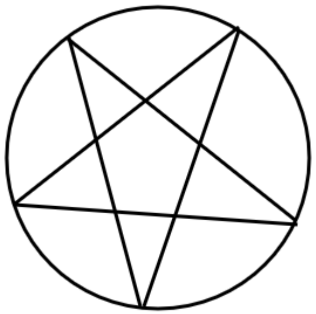
Решение: Ключово наблюдение: Всеки две отсечки с дължина точно 1 се пресичат.



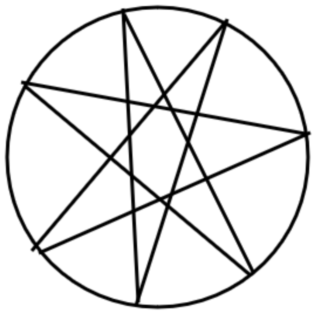
Ако две отсечки с дължина 1 не се пресичат, то можем да построим други две, чиято сума от дължините е повече от 2 - противоречие.



От ключовото наблюдение заключаваме, че всяка от отсечките P3P4, P4P5,..., P(n-1)Pn пресича отсечката P1P2, което означава, че точките P3, P4, ..., Pn се "редуват" от двете страни на P1P2. Оттук заключаваме, че броят на тези точки е нечетен.



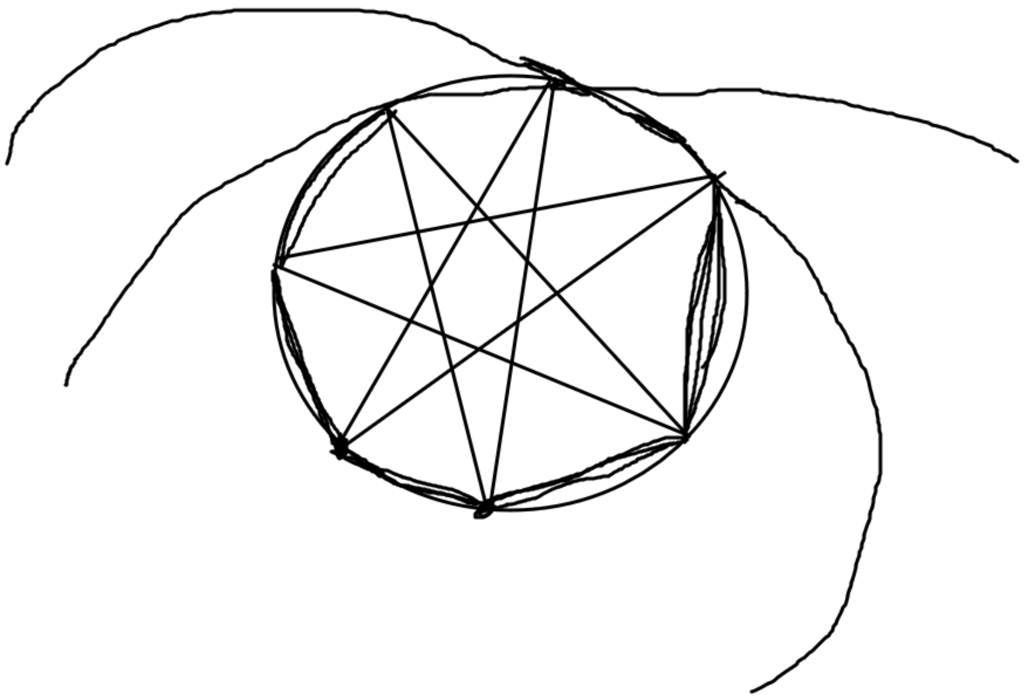
Пример за пет върха



Пример за 7 върха

Задача 5. Дадени са n точки в равнината. Всеки две от тях са на разстояние най-много 1. Свързваме с отсечки точките на разстояние 1, което формира граф. Да се докаже, че този граф има най-много n ребра. (П. Ердьош)

Решение: Започваме с индукция по n. За n=2,3 - OK. Да допуснем, че индукционната хипотеза е изпълнена за n-1. Ако в горепосочения граф има връх от степен 1, то изтривайки този връх (и прилежащото му ребро) позволява да заключим по индукционната хипотеза за n-1. Да допуснем, че всеки връх в този граф е от степен 2 и да "тръгнем на разходка" в графа (не се връщаме назад). Продължаваме, докато попаднем във вече посетен връх. Тогава създаваме цикъл с n върха. Тогава n е нечетно.



Приемаме (поради липса на време), че примерите, зададени в предишната задача, са единствени (упражнение). Тогава всички останали точки се намират във фигурата, определена от окръжностите с центрове в зададените точки по окръжността с радиус 1. За да бъде една точка от фигурата на разстояние точно 1 от две други, тя трябва да съвпада с един от върховете на звездата.