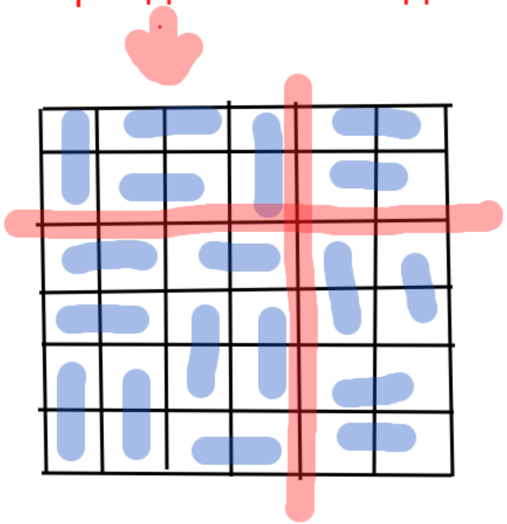
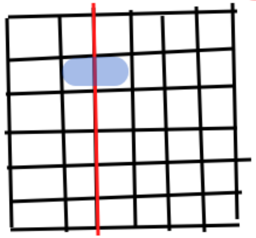
Добро утро! Вие присъсвате на втората част на курса "Увод в покритията". Начало: 9:15.

Задача 1. Дадена е дъска 6 x 6, която искаме да покрием с домина. Да се докаже, че както и да разположим домината, ще съществува линия, която не разделя нито едно от домината на дъската.



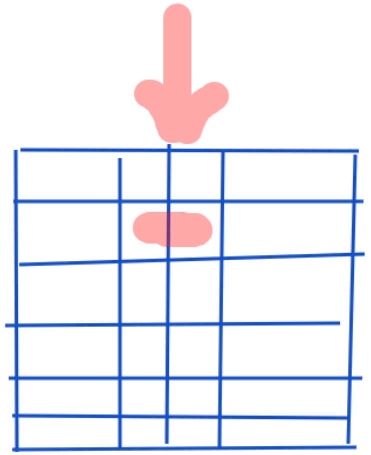
Решение: На дъската има точно 10 линии - 5 хоризонтални и 5 вертикални. Да допуснем, че условието на задачата не е изпълнено. Тогава всяка линия разделя поне едно домино.

Да разгледаме една конкретна линия, която разделя поне едно домино. Да допуснем, че доминото, което тя разделя, е единствено. Тогава тази линия разделя дъската на две по-малки дъски, всяка от които има четен брой полета (едната дъска е с измерения 6 x a, а другата е с измерения 6 x b, където a+b=6). Но тъй като само едно домино е разделено, в двете по-малки дъски остават нечетен брой непокрити полета, които не могат да бъдат покрити с домина.

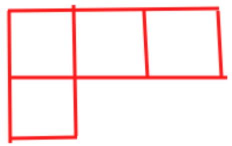


Лява дъска: 11 непокрити полета

Извод: Всяка линия, която пресича поне едно домино, всъщност пресича поне две домина (от същото разсъждение можем да забележим, че всяка линия всъщност пресича четен брой домина). Но на дъската има 10 линии и 6*6/2 = 18 домина. Следователно не може всяка линия да пресича поне едно домино, защото тогава броят на домината на дъската би бил поне 10*2 = 20 домина - противоречие.

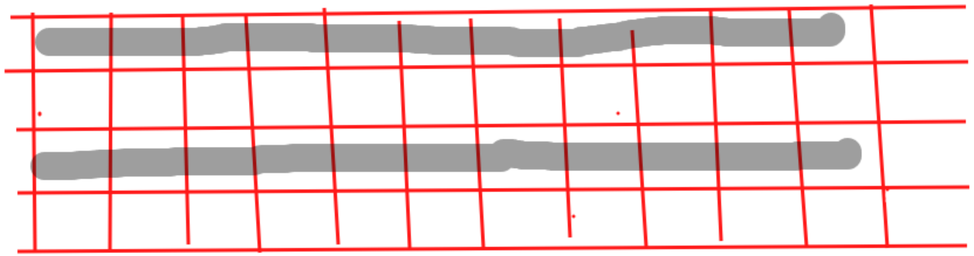


Задача 2. Можем ли да покрием дъска 4 x 11 със фигурки от следния вид:

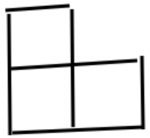


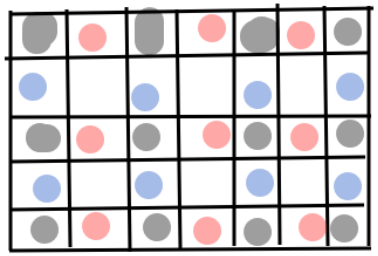
?

Шахматно оцветяване: 22 черни и 22 бели полета. Фигурката винаги покрива 2 бели и 2 черни полета. Това би могло да означава, че дъската може все пак да се покрие с 11 фигурки.



Оцветяваме в черно полетата в първия и третия ред, а в бяло останалите полета. Фигурата винаги покрива или три черни и едно бяло поле, или три бели и едно черно поле. Да допуснем, че покритие на дъската с фигурки от зададения вид съществува, и нека x от тях покриват три бели и едно черно поле, а y от тях покриват три черни и едно бяло поле. От една страна трябва да имаме, че $x+y = 11$. От друга страна, тъй като броят на черните полета на дъската е равен не броя на белите, то $3x+y$ (бели полета) $= 3y+x$ (черни полета), тоест $x=y$. Тогава $x+y=11$ и $x=y$ означава, че x и y не са цели числа - противоречие с допускането, че дъската може да бъде покрита с фигурки от зададения вид.

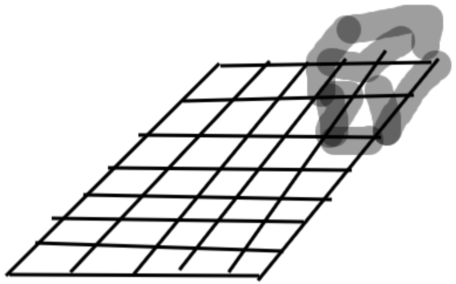
Задача 3. Дадена е дъска 5 x 7. Искаме да я покрием с плочки от вида  (ъгълче) в няколко слоя по такъв начин, че всяко поле на дъската да бъде покрито с един и същи брой ъгълчета. Можем ли да успеем?



Решение: Оцветяваме дъската, както е показано на картинката вляво. Тогава имаме 12 черни полета, 9 червени, 8 сини и 6 бели полета. Да забележим, че всяко ъгълче покрива най-много едно поле от даден цвят.

Нека дъската е покрита от a слоя от ъгълчета. Тогава имаме общо 5 x 7 x a квадратчета във всички ъгълчета, участващи в покритието, и следователно това число се дели на 3. Но 3 не дели нито 5, нито 7, и следователно 3 дели a.

Извод: a = 3b, където b е естествено число.



Оттук можем да заключим, че броят ъгълчета, които участват в многослойното покритие на дъската, е $(5 \times 7 \times a)/3 = (5 \times 7 \times 3b)/3 = 35 \times b$.

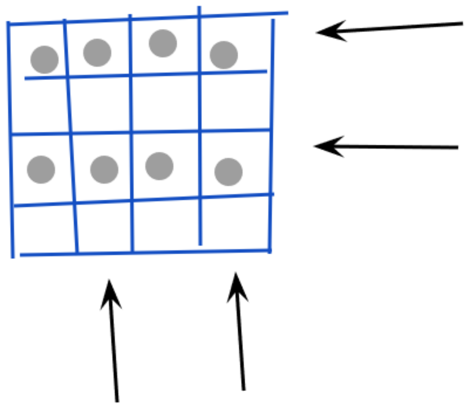
Броят черни полета на дъската е 12 и всяко от тях е покрито a пъти, следователно броят пъти, които някое черно поле е покрито, е $12 \times a = 12 \times 3b = 36 \times b$. Но всяко ъгълче може да покрие най-много едно черно поле (всяко ъгълче е включено в квадратче 2 на 2, а квадратче 2 на 2 вианги съдържа и четирите цвята по веднъж).

Това е противоречие, тъй като броят ъгълчета е $35 \times b$, а броят пъти, които черно квадратче трябва да бъде покрито, са $36 \times b > 35 \times b$.

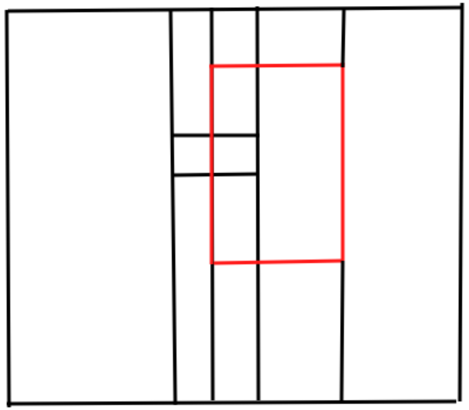
Задача 4. Дадена е дъска с измерения 50 х 50, която е оцветена шахматно. На един ход имаме право да изберем един правоъгълник, който "върви" по линиите на дъската, и да преоцветим квадратчетата в този правоъгълник (бяло -> черно, черно -> бяло). Колко най-малко хода трябва да направим, за да успеем да оцветим всички квадратчета на дъската в един и същи цвят.

Да започнем с малки случаи:
2 х 2 - 2 хода
4 х 4 - 4 хода (но може и да може с 3?)

Решение: Да оцветим дъската така, че най-горното ляво поле е черно. Ако сменим цветовете в колона 2, 4, 6, .., 50, то всички черни квадратчета ще бъдат в нечетни редове, а всички бели - в четни редове. Тогава е доостатъчно да сменим цветовете на нечетните редове, за да достигнем до изцяло бяла дъска. Това прави общо 50/2 + 50/2 = 50 хода.



Може ли с по-малко ходове да стигнем до едноцветна дъска? Да разгледаме две съседни полета. Тези съседни полета в началото имат различни цветове. Тогава задължително трябва да сменим цветовете в правоъгълник, който разделя двете полета (разделя - едното е вътре, другото е отвън), иначе след всички смени двете полета ще останат в различни цветове, понеже винаги или и двете са били преоцветявани, или нито едно от двете не е било преоцветявано.



Наблюдение: Правоъгълникът има две страни, успоредни на вертикалните линии на квадрата, и две страни, успоредни на хоризонталните линии. Колко "двойки" може да раздели един правоъгълник?