Броене по два начина и комбинаторни тъждества – лекция 1

Записки

Броене по два начина и комбинаторни тъждества.

1. Броене

Имаме n различни шапки. По колко начина можем да ги наредим в редица?

$$n! = n.(n-1).(n-2)...1$$

кутии, в които поставяме шапки

една възможна подредба на шапките, се нарича пермутация

По колко начина можем да запълним първите к кутии с по една от тези n шапки?

n!/(n-к)!

n.(n-1).(n-2)...(n-к+1)=n!/(n-к)!

вариация на n шапки к-ти клас

По колко начина можем да изберем колекция от к шапки от тези n?

По-рано получихме, че можем да изберем n!/(n-к)! наредени к-орки от тези n шапки. Всяка възможна к-орка е броена толкова пъти, колкото начини имаме да подредим избраните к шапки (т.е. к!). Това означава, че различните колекции са n!/((n-к)!к!)

Една колекция се нарича комбинация на n шапки к-ти клас

Биномният коефициент "n над к" е всъщност именно

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Задача 1: Докажете, че

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$n! = n(n-1)\dots 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3.\dots.k}$$

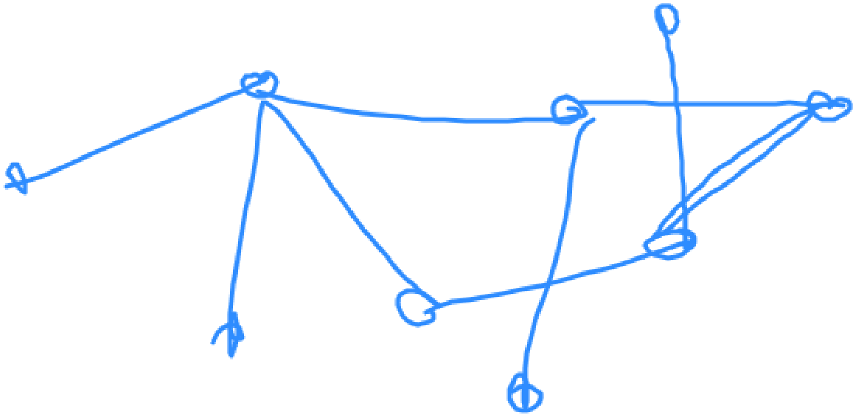
$(a+b)^n = (a+b) \cdot \cdot \cdot \cdot (a+b)$

за да получим $a^{n-k} b^k$ трябва да вземем а от n-к скоби и в от к скоби

можем да изберем "скобите", от които идва в по $\binom{n}{k}$ начина

това означава, че изразът $a^{n-k} b^k$ се среща $\binom{n}{k}$ пъти след разкриване на скобите

Броене по два начина: Броим някакъв обект по два начина и получаваме равенство на два израза.



Пример: В един граф сборът от степените е 2 пъти повече от броя на ребрата.

Методът: броим краищата на ребрата - всяко ребро има два края, т.е. общия брой е 2e (e - бр. ребра).

От друга страна, всеки връх е край на толкова ребра, колкото е степента му. Т.е. общия брой краища е d(v1)+d(v2)+...+d(vn), където d(vi) е степента на върха vi

Задача 2: Докажете, че

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad k < n$$

Какво броим? И какво означават тези изрази?

Идея: Изразяваме с факториели. Решение без броене.

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$$

$$(n-k)! = (n-1-k)!\,(n-k)$$

$$k! = (k-1)!\,k$$

привеждаме под общ знаменател

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{?}{=} \frac{(n-1)!\,(n-k)}{(n-k-1)!\,k!\,(n-k)} + \frac{(n-1)!\,k}{(n-k)!\,(k-1)!\,k}$$

$$\frac{(n-1)!\,(n-k) + (n-1)!\,k}{(n-k)!\,k!}$$

$$\frac{(n-1)!\,[n-k+k]}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$\binom{n}{k}$ – бр. начини да оцветим к от тези n кръгчета

Имаме две възможности за оцветяване - или сме оцветили 1, или не сме го оцветили.

Ако 1 е оцветено, от останалите n-1 кръгчета трябва да оцветим к-1 и това се случва по $\binom{n-1}{k-1}$ начина

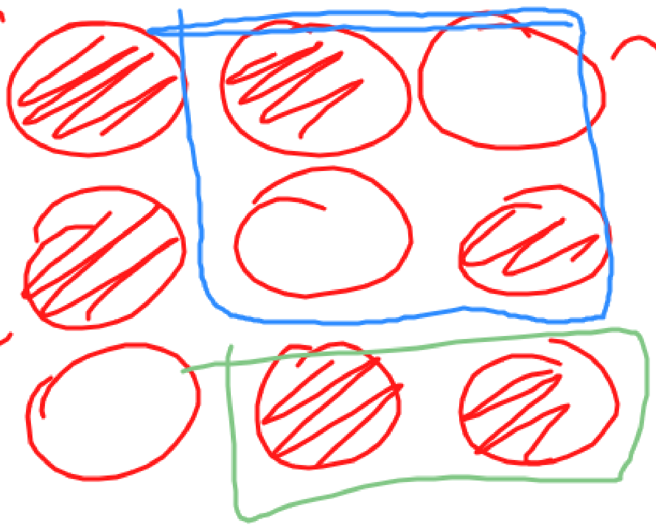
Ако 1 не е оцветено, то от останалите n-1 кръгчета трябва да оцветим к-1. Това се случва по $\binom{n-1}{k}$ начина.

Следователно броят начини да оцветим к от n-те кръгчета е точно

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

$\binom{2}{1}=2$

$\binom{2}{2}=1$



2 от тях да оцветим

$$\binom{3}{2}=\frac{3.2}{1.2}=3$$

Задача 3: Докажете

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$$

Какво точно броим и на какво съответстват изразите?

Идея 1 (оказва се, че не е точно това, което искаме):

броим броя възможности да изберем няколко предмета от n предмета

k предмета $\longrightarrow \binom{n}{k}$ начина

$$\Rightarrow \text{общо } \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Искаме да изберем произволно количество предмети от n предмета. Всеки предмет е включен или не (2 възможности за всеки предмет), т.е. общо 2^n начина

Край на идея 1

Връщайки се към задачата: $\binom{n}{k}$ начина да изберем отбор от к ученици от клас от n ученици

k начина да изберем капитан от тези к ученици

$$1\binom{n}{1}+\dots+n\binom{n}{n}$$

бр. начини да изберем непразен отбор с капитан от клас с n ученици.

От друга страна, можем да преброим начините да образуваме отбор с капитан по следния начин:
Първо избираме капитана - това става по n начина.
След това за всеки от останалите ученици решаваме дали да участва или не (това прави 2 възможности за всеки от останалите ученици, т.е. общо 2^{n-1} възможности да подберем остатъка от отбора.

Следователно начините да образуваме отбор с капитан е $n2^{n-1}$

Задача 4: (Тъждество на Вандермонд) Нека n и m, l са естествени числа. Докажете

$$\binom{n}{0}\binom{m}{l-0}+\binom{n}{1}\binom{m}{l-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{l-2}+$$

$$\ldots+\binom{n}{l}\binom{m}{l-l}=\binom{n+m}{l}$$

клас n момичета m момичета. Искаме да изберем отбор от l души. От една страна, това става по $\binom{n+m}{l}$ начина

От друга страна, начините да изберем отбор с k момичета е $\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}$

Събирайки за всички възможни k получаваме израза от лявата страна.

Задача 5: Пермутация на числата 1, 2, 3, ..., n наричаме някаква тяхна подредба. Нека p(k) е броят пермутации, които имат точно k фиксирани точки. (Казваме, че една пермутация има точно k фиксирани точки, ако точно k от числата се намират на началната си позиция. Например, ако n=3, в пермутацията 1,3,2 има една фиксирана точка, докато в пермутацията 2,3,1 има 0 фиксирани точки.) Докажете, че

$$1p(1) + 2p(2) + \dots + np(n) = n!$$

брой начини да подредим числата от 1 до n

Какво можем да броим?

p(k) – бр. начини k на местата си

n-k не са

kp(k)

Подсказка: Какво ще стане, ако броим фиксираните точки?

$$1p(1)+ \dots + np(n) = n!$$

В една пермутация с к фиксирани точки броят на фиксираните точки е к. Броят на пермутациите с к фиксирани точки е p(k),

т.е. оттук получаваме кр(к). Събирайки тези изрази за различните възможни стойности на к дава общия брой фиксирани точки във всички възможни пермутации на числата от 1 до n.

Да разгледаме някое число i между 1 и n. Колко пермутации имат i за фиксирана точка?

Ако фиксираме i възможните начини да подредим останалите n-1 числа са точно (n-1)!

Следователно всяко число от 1 до n е фиксирана точка в (n-1)! пермутации, т.е. общият брой на фиксираните точки във всички пермутации е n((n-1)!)=n!

зелени = др. възможности

$$(n-1)(n-2)\ldots 1 = (n-1)!$$

брой пермутации на 1, ... n,
в които i е фиксирана точка

1 е фиксирана точка в (n-1)! пермутации
2 е фиксирана точка в (n-1)! пермутации
...
n е фиксирана точка в (n-1)! пермутации