Броене по два начина и комбинаторни тъждества, част 2

Задача 1: n, d - естествени числа, n>d. Докажете, че

$$\binom{n}{d}\binom{d}{d}+\binom{n}{d+1}\binom{d+1}{d}+\dots+\binom{n}{n}\binom{n}{d}=\binom{n}{d}2^{n-d}$$

Нека от n души да избираме отбор от поне d души отбор. Веднъж като сме избрали отбора, избираме d души, които са в главния списък за състезание (т.е. останалите са резерви). Ако в отбора имаме k души, то отбора го избираме по $\binom{n}{k}$ начина, а главния списък избираме по $\binom{k}{d}$ начина. Това означава, че общо имаме

$$\binom{n}{d}\binom{d}{d}+\binom{n}{d+1}\binom{d+1}{d}+\dots+\binom{n}{n}\binom{n}{d}$$

$n-d$ други

От друга страна, първо можем да изберем главния списък - това става по $\binom{n}{d}$ начина, а за всеки от останалите решаваме дали участва в разширения отбор или не

За всеки от останалите има 2 възможности (участва като резерва или не участва като резерва), т.е. 2^{n-d}

Т.е. общо $\binom{n}{d}2^{n-d}$

Задача 2: Всеки ден три от седемте джуджета отиват да работят в мината. След k дни се оказало, че всеки две джуджета са били заедно до мината поне веднъж. Каква е минималната възможна стойност на k?

Задача 2: Всеки ден три от седемте джуджета отиват да работят в мината. След k дни се оказало, че всеки две джуджета са били заедно до мината поне веднъж. Каква е минималната възможна стойност на k?

Предложения: 35, 7, 17, 9

Когато дадем отговор на задачата, трябва да докажем, че отговорът работи (т.е. да дадем пример) и да докажем, че за по-малко дни няма да стане (оценка)

Оценка: Да допуснем, че k<=6 Броим двойките джуджета, които са били едновременно в мината. За един ден имаме 3 двойки, т.е. двойките джуджета са 3k (може и да сме броили една и съща двойка повече от веднъц), което е не повече от 18. От друга страна, всяка двойка джуджета трябва да е ходила до мината, което прави 7.6/2=21 двойки, противоречие.

Пример за 7 дни?
Джуджета 1,2,3,4,5,6,7
Искаме да направим 7 тройки, така че всяка възможна двойка е срещана поне веднъж

123	123
145	145
167	167
246	247
257	346
356	256
347	357

Задача 3: Всеки ден три от шест джуджета отиват да работят в мината. След k дни се оказало, че всеки две джуджета са били заедно до мината поне веднъж. Каква е минималната възможна стойност на k?

Предположения за отговор: 5 , 6

Оценка: Ако k<=4, то тогава всеки ден имаме 3 двойки, т.е. най-много 12 двойки. От друга страна, искаме поне 6.5/2=15, т.е. няма как да стане за по-малко от 5 дни.
Следователно k>=5.

Ако допуснем, че може за 5 дни, то имаме точно 3.5=15, т.е. всяка двойка е броена точно веднъж.

Можем да считаме, че първия ден са отишли 1,2,3. Тогава втория ден, в който 1 е в мината, не можем да повтаряме двойки, т.е. 1 е било с джуджета, различни от 2 и 3. Можем да считаме, че са били 4 и 5.

Тогава единствената двойка, в която 1 участва и не е била броена до този момент, е 1-6. Това означава, че 1 е бил още един ден до мината, заедно с 6 и още едно джудже измежду 2,3,4,5. Но това джудже и 1 дава двойка, която е била броена, противоречие. Следователно k>=6.

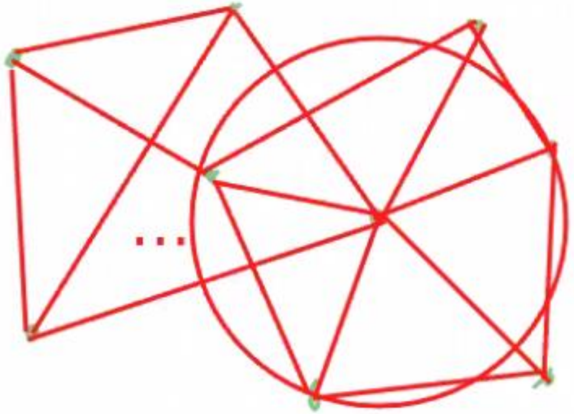
Пример за 6 дни?

123	123
145	145
246	162
613	245
256	356
345	346

Задача за упражнение: Всеки ден три от n джуджета отиват да работят в мината. След k дни се оказало, че всеки две джуджета са били заедно до мината поне веднъж. Каква е минималната възможна стойност на k?

Задача 4: Нека n и k са естествени числа и S е множество от n точки в равнината, такова, че за всяка точка A от S имаме поне k точки на едно и също разстояние от A. Докажете, че

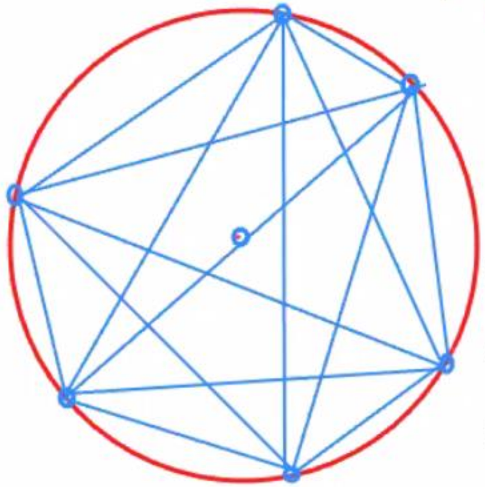
$$n-1 \geq \binom{k}{2} \quad \left(\text{т.е. } n > \binom{k}{2}\right)$$



Подсказка: Броим отсечките между две точки на S (броим двойките от точки на S)

Колко на брой са отсечките с краища точки от S? $\binom{n}{2}$

Колко на брой хорди има в окръжността, съответстваща на P? Поне $\binom{k}{2}$



на картинката имаме 15 хорди

Броейки хордите в окръжностите, съответстващи на точките от S, получаваме $\geq n\binom{k}{2}$ хорди, броени може би >1 път

Може да сме броили една хорда повече от веднъж.

Колко пъти може да сме броили една и съща хорда?

Да допуснем, че една хорда е била броена от няколко окръжности.

Една хорда може да бъде броена от произволен брой окръжности.

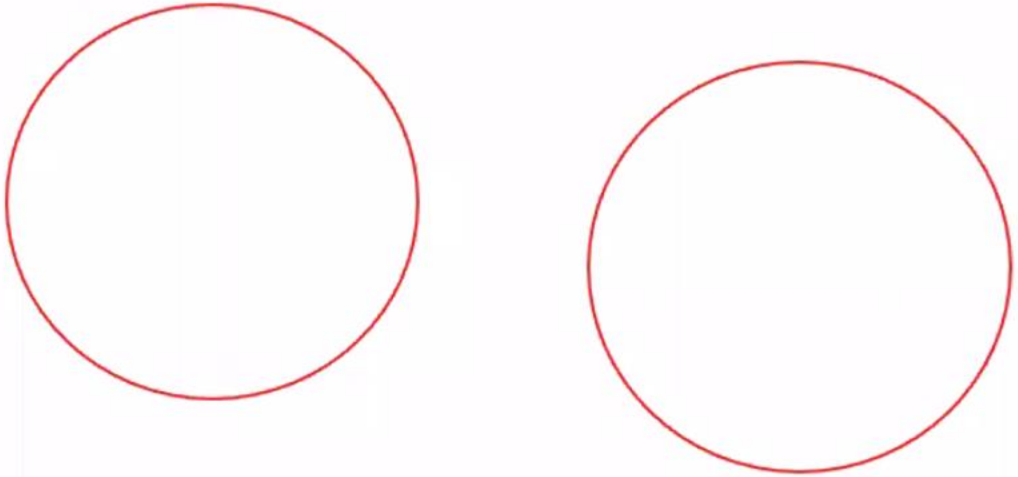
Ако отсечките, които са броени като хорди поне веднъж, са t на брой, то ще имаме $t \le \binom{n}{2}$

$t \le n\binom{k}{2}$

Можем ли да намерим долна оценка за t?

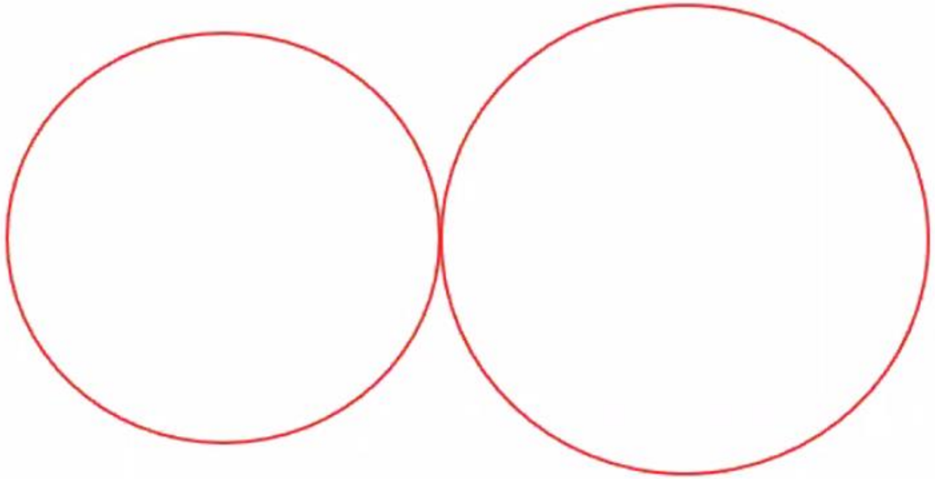
Твърдение: Всеки две окръжности споделят най-много една хорда

Вариант 1:



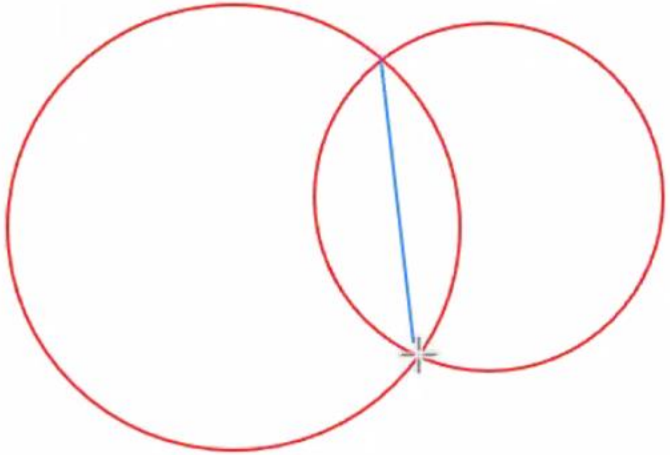
0 споделени хорди

Вариант 2: Окръжностите се допират

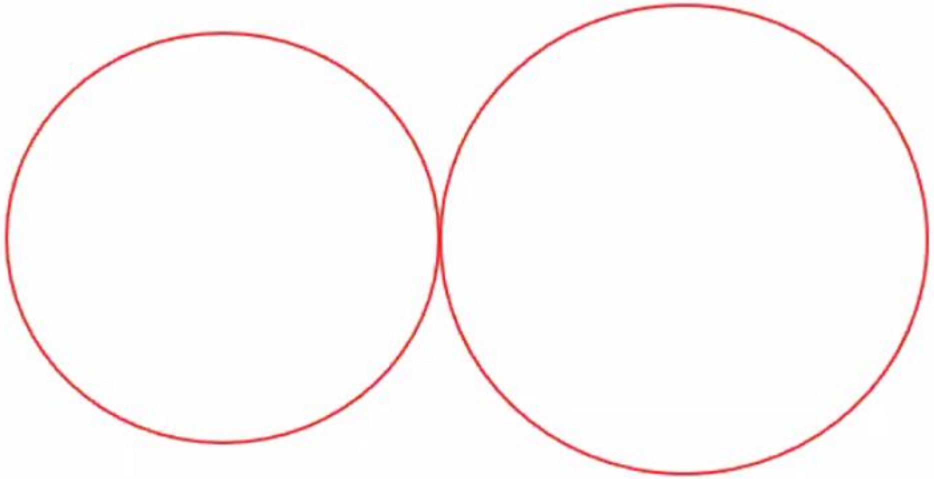


0 споделени хорди

Вариант 3: Окръжностите се пресичат в >1 точка

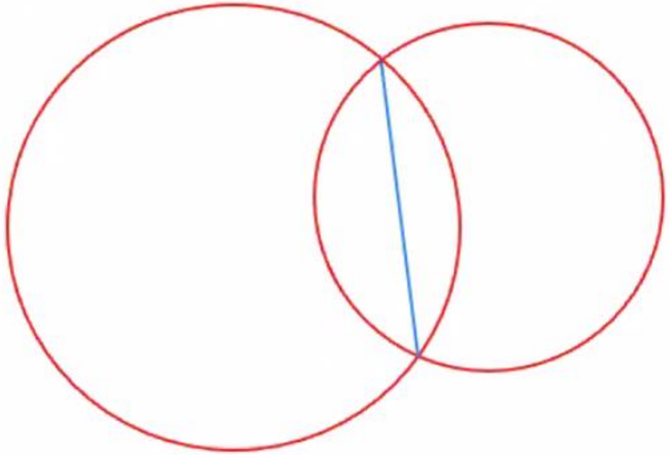


Вариант 2: Окръжностите се допират



0 споделени хорди

Вариант 3: Окръжностите се пресичат в >1 точка



1 споделена хорда (възможно е всъщност тя да не е с краища точки от S - т.е. да не сме я броили)

Всеки две окръжности, съответстващи на две от точките на S, споделят най-много една от хордите с краища точки от S. Това означава, че броят пъти, в който сме броили хорда повече от веднъж, е най-много $\binom{n}{2}$

(бр. двойки окръжности, съответстващи на точки от S)

$\leq$ брой с повторения

брой повторения

Това означава, че броят различни хорди е поне

$$n\binom{k}{2} - \binom{n}{2} \leq \#\text{всички отсечки } \binom{n}{2}$$

$$n\binom{k}{2} \le 2\binom{n}{2}$$

$$\cancel{n}\,\frac{k(k-1)}{2} \le \cancel{2}\cdot\cancel{n}\cdot\frac{(n-1)}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\binom{k}{2} \le n-1}$$

Забележка: решението, написано по време на лекцията, не е напълно вярно Това, представено тук, е поправено.

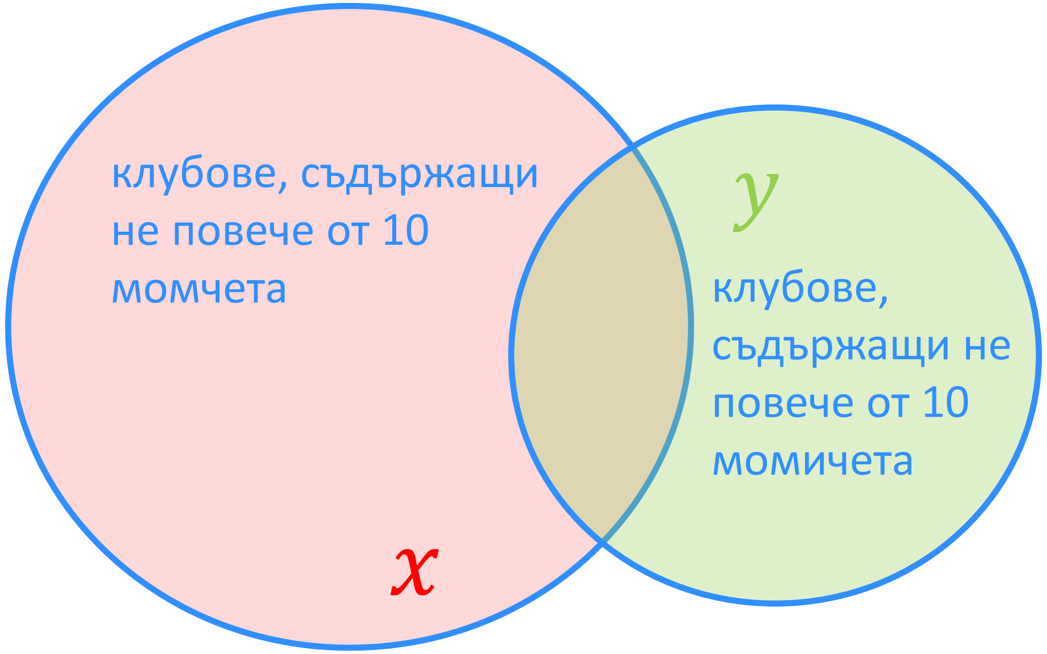
Задача 5: В едно училище има 2007 момичета и 2007 момчета. Всеки ученик е член на не повече от 100 клуба. Всяка възможна двойка момиче и момче посещава поне един общ клуб. Докажете, че има клуб, в който членуват поне 11 момичета и 11 момчета.

Допускаме противното: няма клуб с поне 11 момичета и 11 момчета.

Броим тройките (момиче, момче, клуб), където момичето и момчето участват в клуба.
Ако фиксираме двойка момиче и момче, то те участват в поне една тройка по условие. Това означава, че броят тройки е по-голям или равен на броят двойки (момче, момиче), който е 2007.2007=4 028 049.

Да допуснем, че няма нито един клуб, съдържащ поне 11 момчета и поне 11 момичета. Тогава във всеки клуб или има по-малко от 11 момчета, или има по-малко от 11 момичета (или и двете). Нека броят на клубовете, съдържащи не повече от 10 момчета, е x, а на клубовете, съдържащи не повече от 10 момичета - y. Тогава

$$x + y \geq \text{бр. клубове} \geq 2007^2$$



Понеже всяко момиче членува в най-много 100 клуба, двойките (момиче, клуб), в които момичето членува в клуба, са не повече от 2007.100. Нека К е клуб, в който няма повече от 10 момчета. Тогава за всяка възможна двойка (момиче, К), където момичето членува в К, има най-много 10 момчета, които можем да добавим, за да получим разрешена тройка. Оттук получаваме, че $y \leq 2007.100.10$

Аналогично получаваме $x \leq 2007.1000$. Но това дава $x + y \leq 2007.2000$, което е в противоречие с $x + y \geq 2007.2007$, т.е. допускането е погрешно и следователно съществува клуб с поне 11 момичета и поне 11 момчета.