



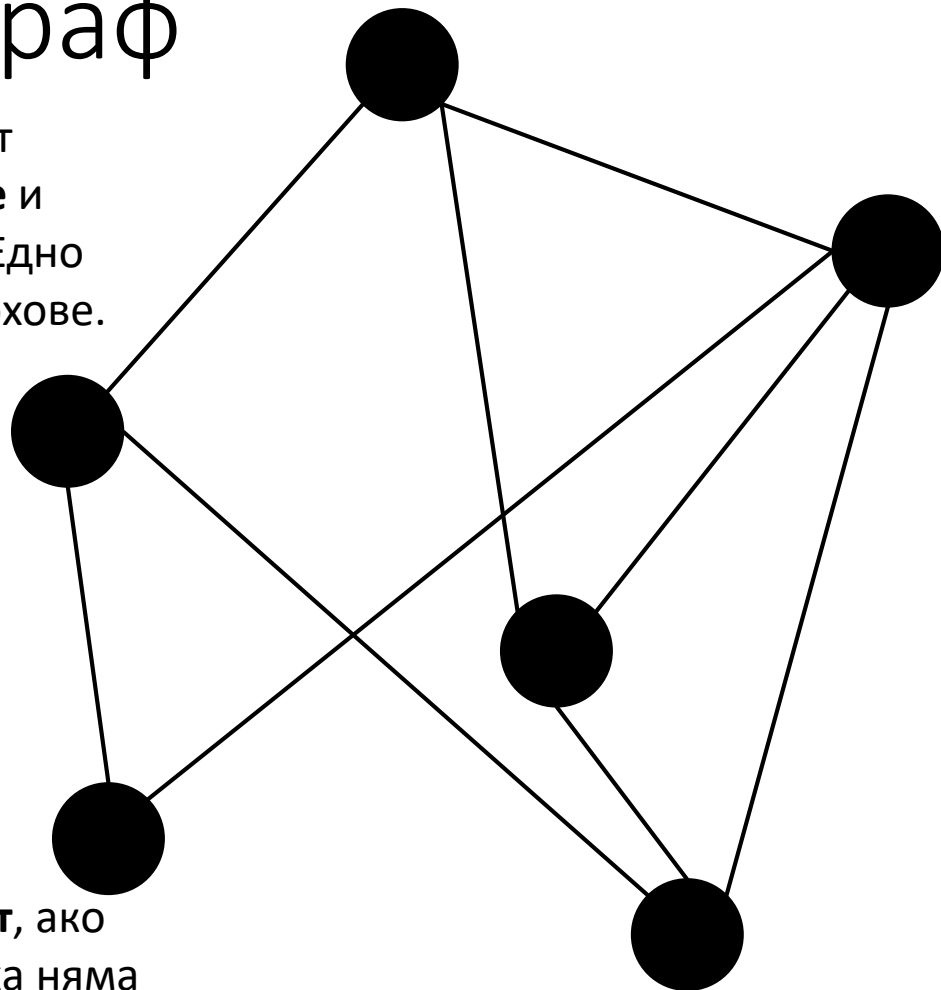
Теория на графите



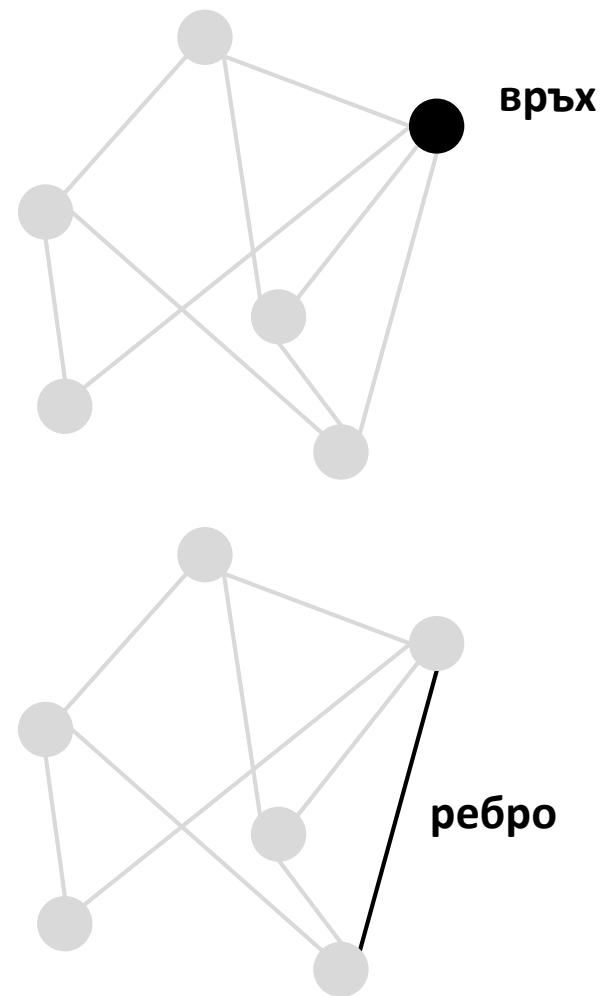
ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

Прост граф

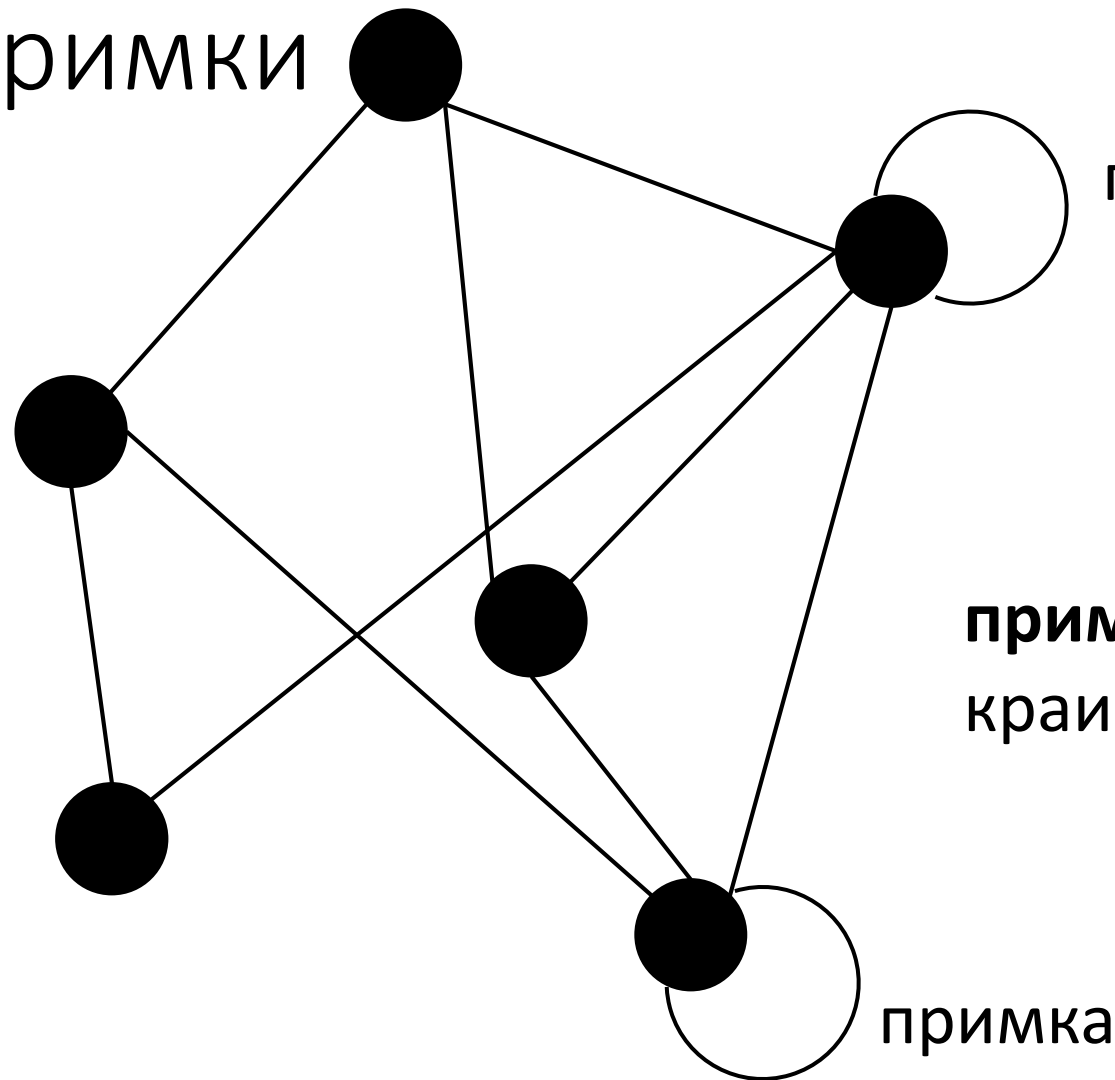
Един **граф** се състои от множество от **върхове** и множество от ребра. Едно **ребро** е двойка от върхове.



Наричаме графа **прост**, ако между всеки два върха няма повече от едно ребро и нямаме ребро, чиито два края са един и същ връх.



Граф с примки

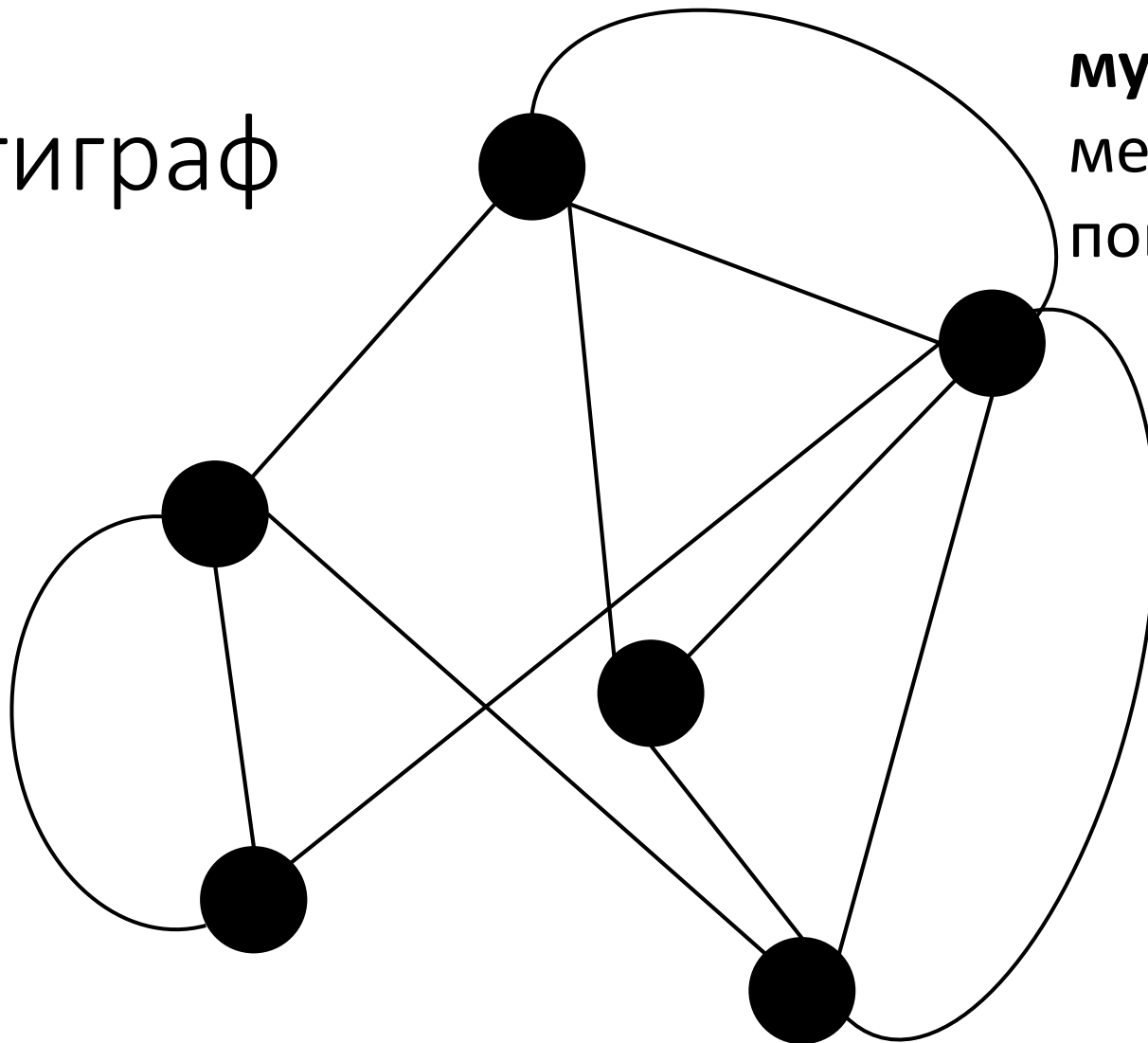


примка

примка е ребро, което има за
краища един и същ връх

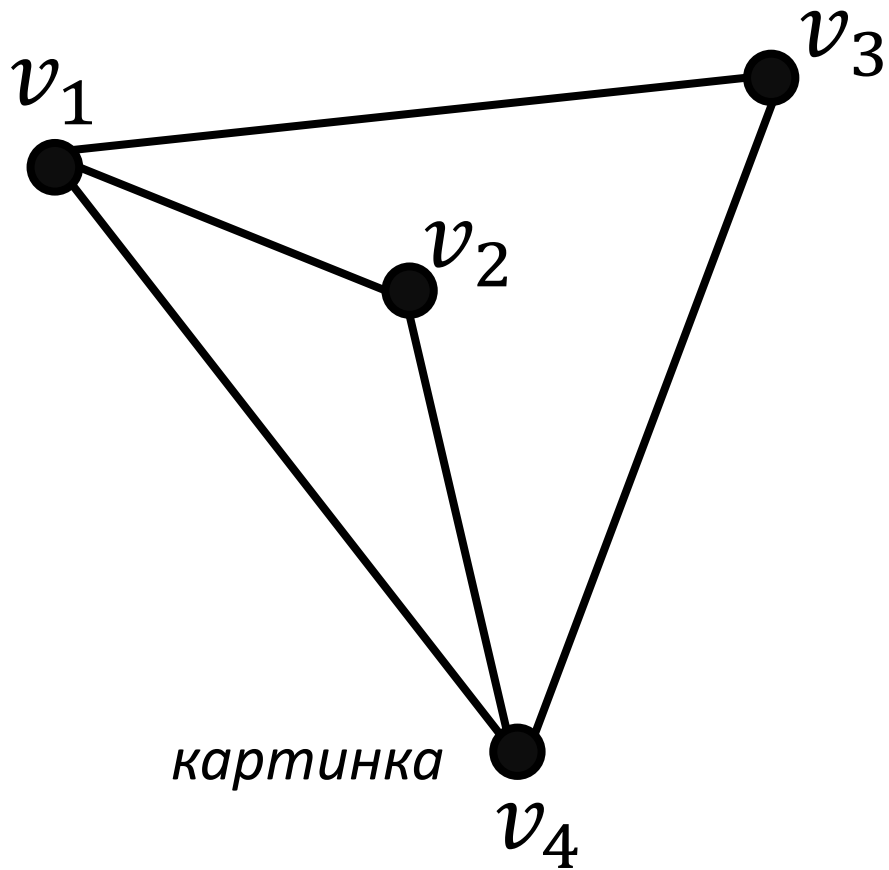
примка

Мултиграф



мултиграф е граф, в който между два върха може да има повече от едно ребро

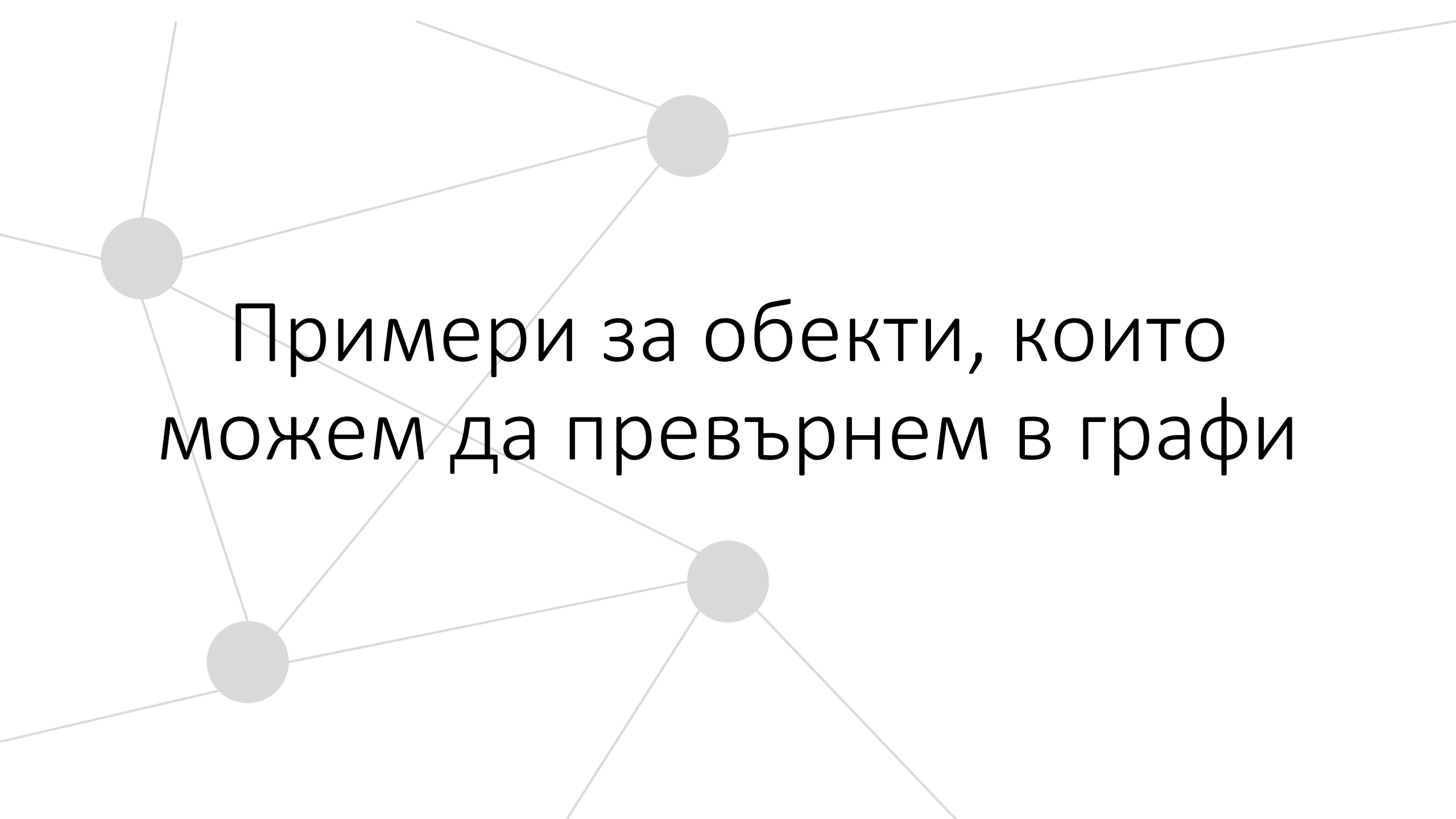
Различни начини да представим граф



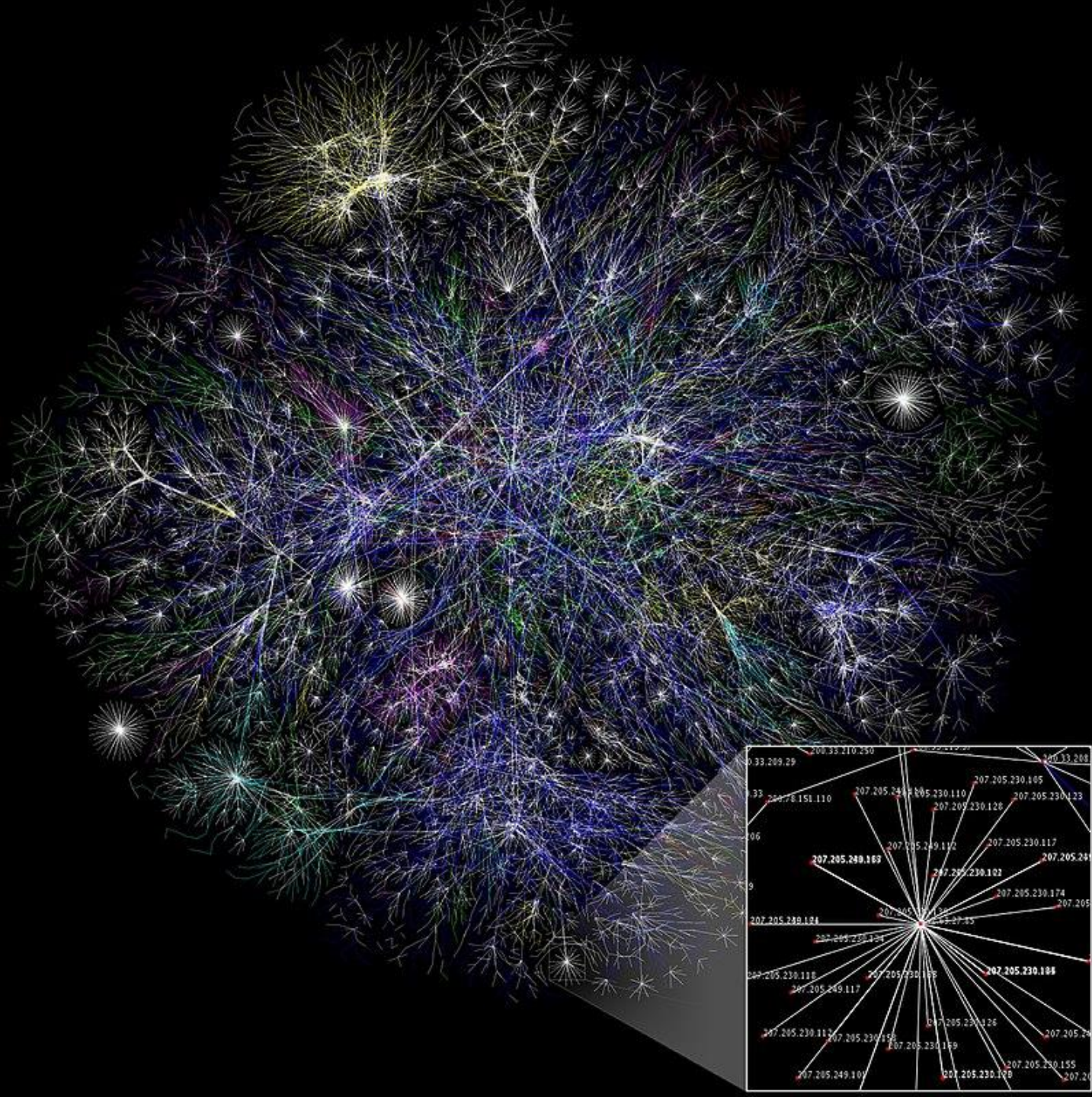
списък
Върхове: v_1, v_2, v_3, v_4
Ребра: $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4$

таблица

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_3	1	0	0	1
v_4	1	1	1	0



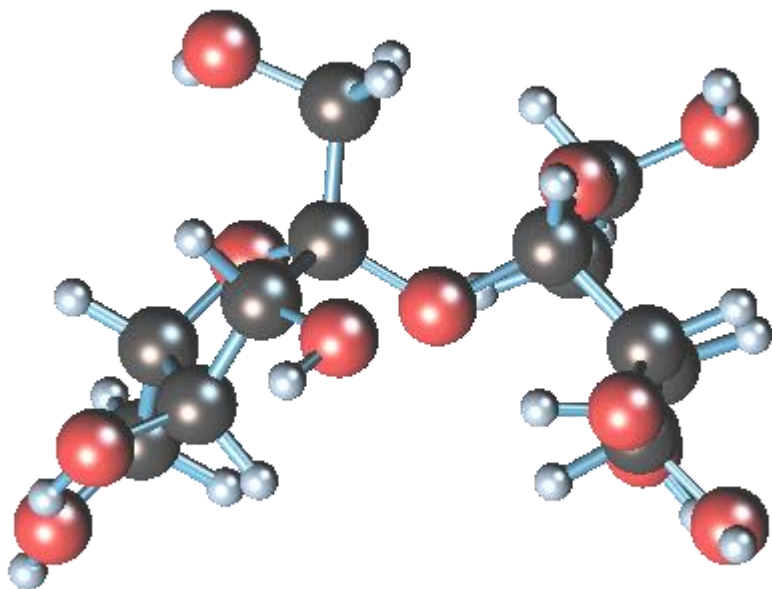
Примери за обекти, които
можем да превърнем в графи



Частична карта на интернет през 2005.

Картата представлява граф, чиито върхове са IP адреси. Между два върха има ребро, ако двата адреса имат директна връзка помежду си.

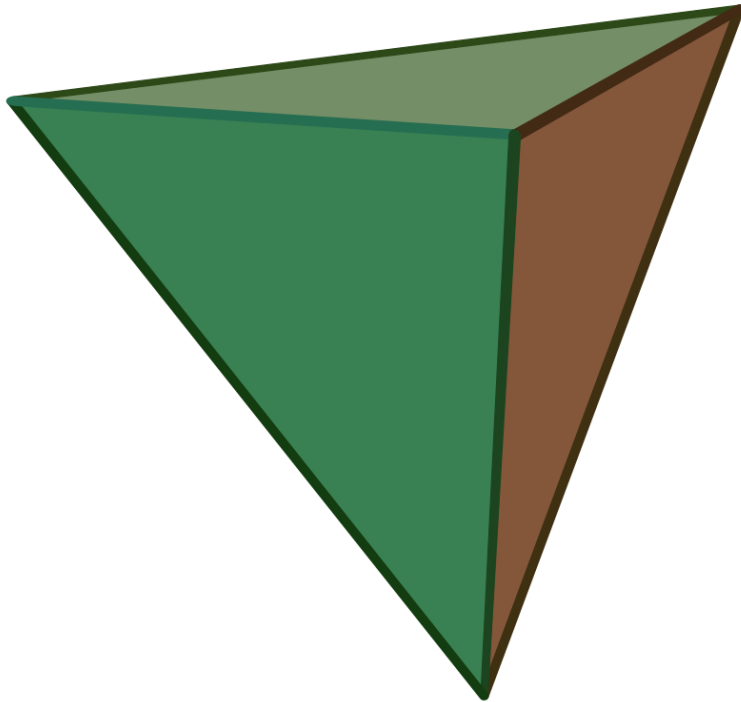
By The Opte Project - Originally from the English Wikipedia; description page is/was here., CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1538544>



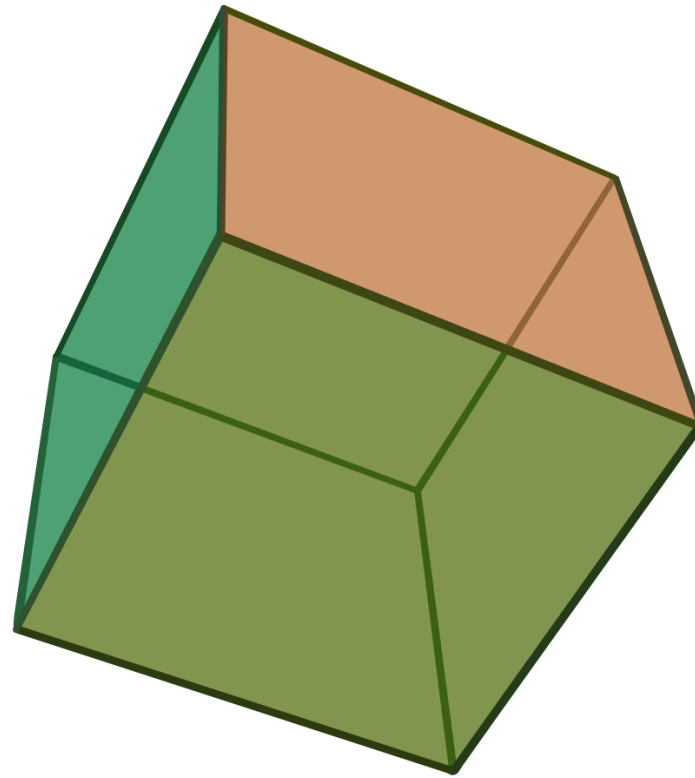
Модел на молекулата на захарозата.

Можем да получим граф, в който върховете съответстват на атоми, а ребрата съответстват на химични връзки между атомите.

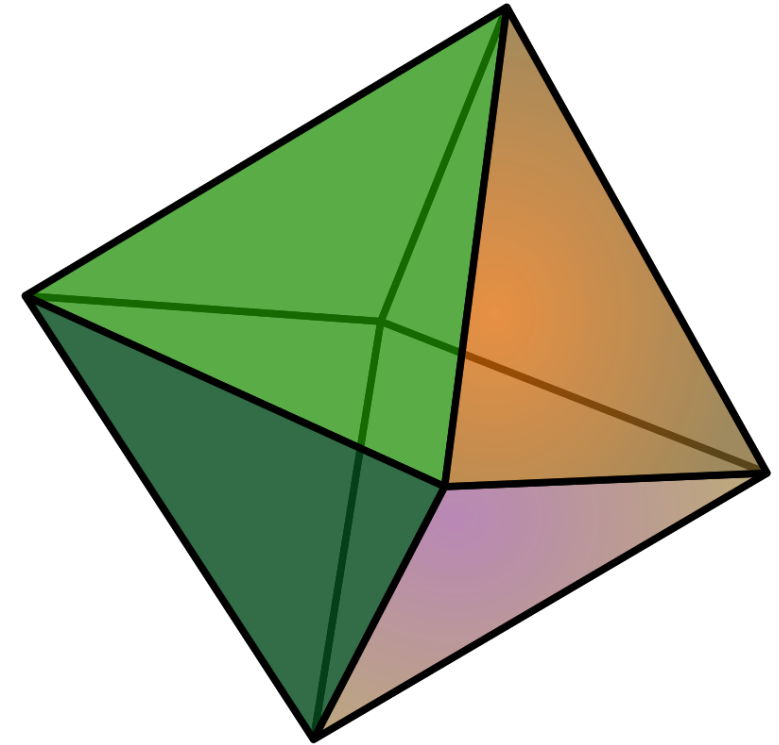
*By RedAndr - self-made, the image was rendered by the ViewMol3D programs, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1991944>*



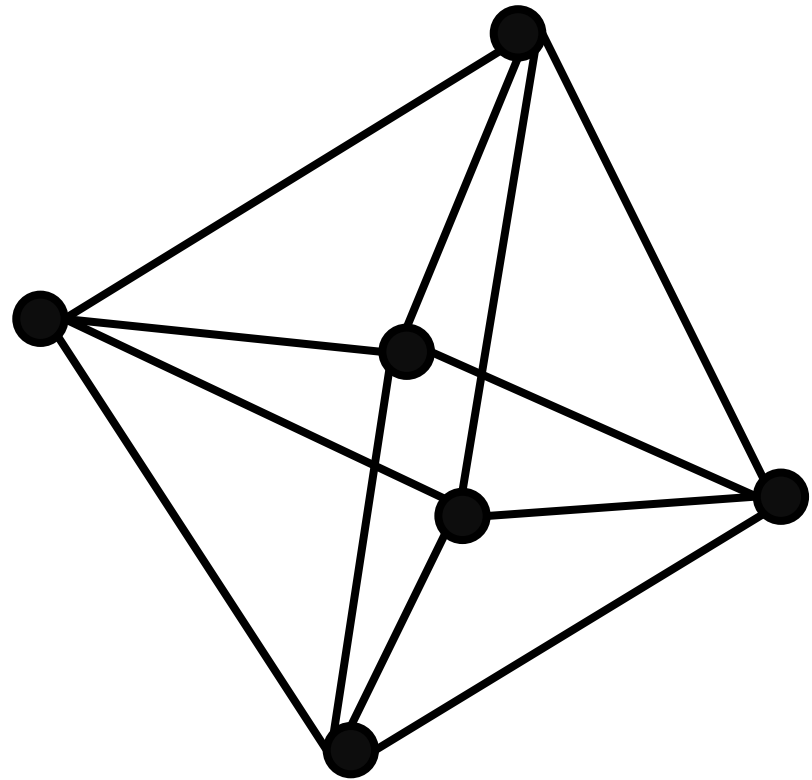
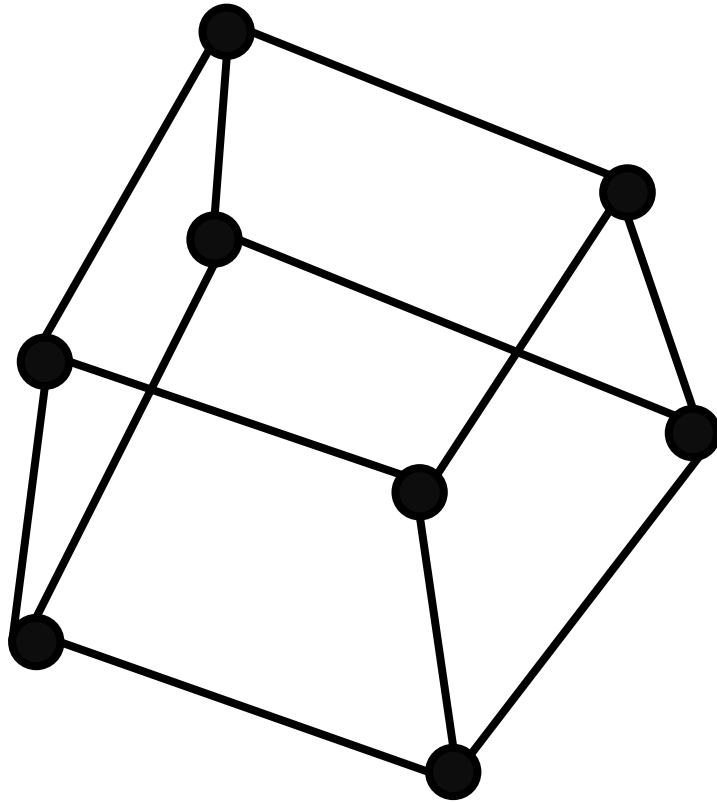
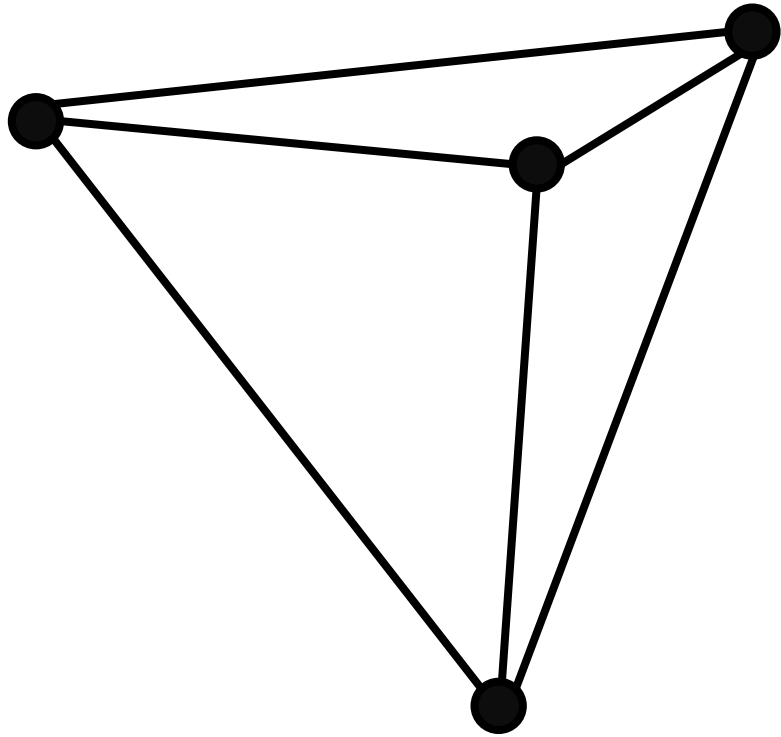
*By !Original:Kjell AndréVector: DTR -
Vectorisation of Tetrahedron.jpg, CC BY-
SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2231463>*

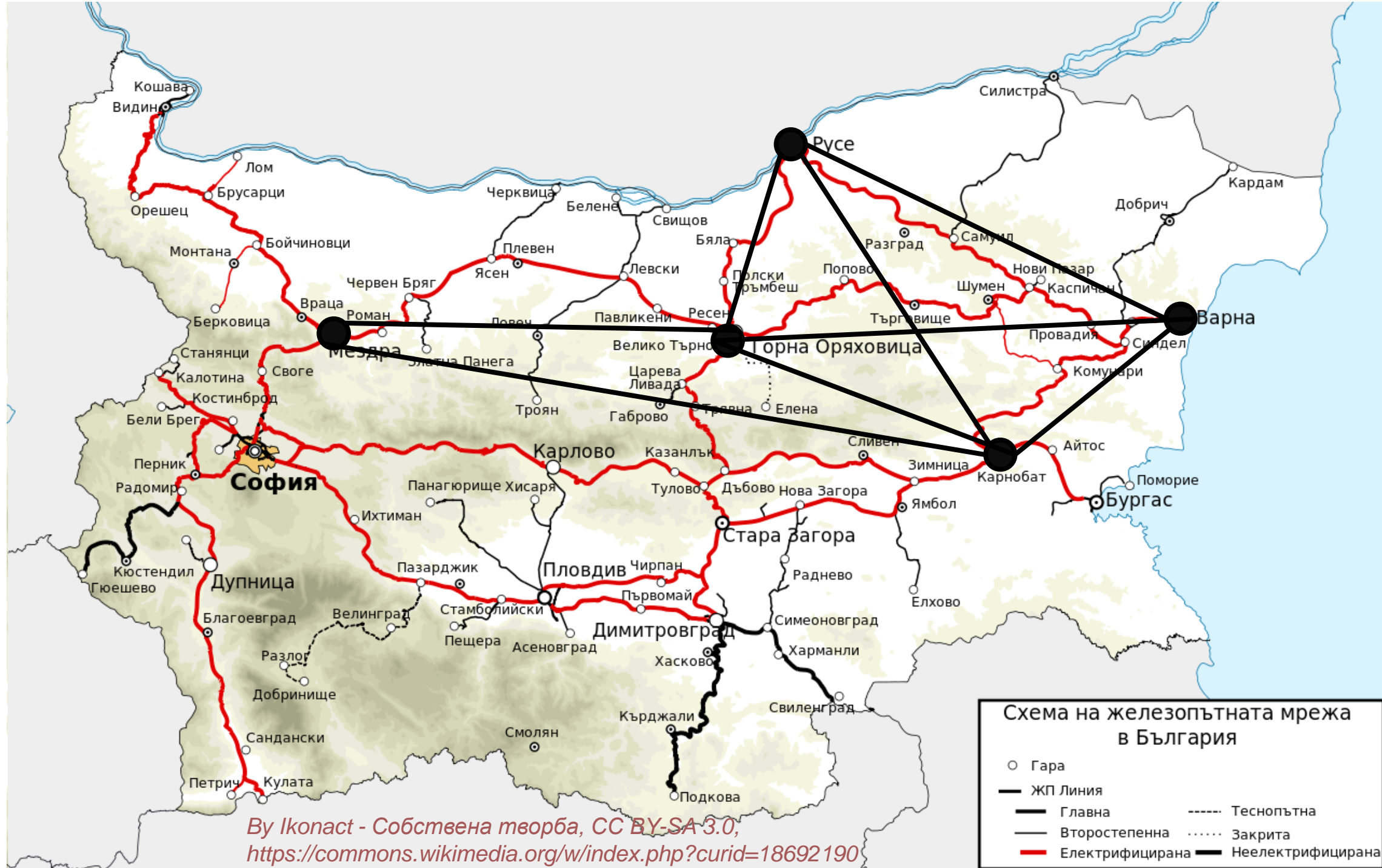


*By User:DTR - Vectorisation of
Image:Hexahedron.jpg, CC BY-
SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2231470>*



*By User:Stannered - Vectorisation
of Image:Octahedron.jpg, CC BY-
SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1742116>*

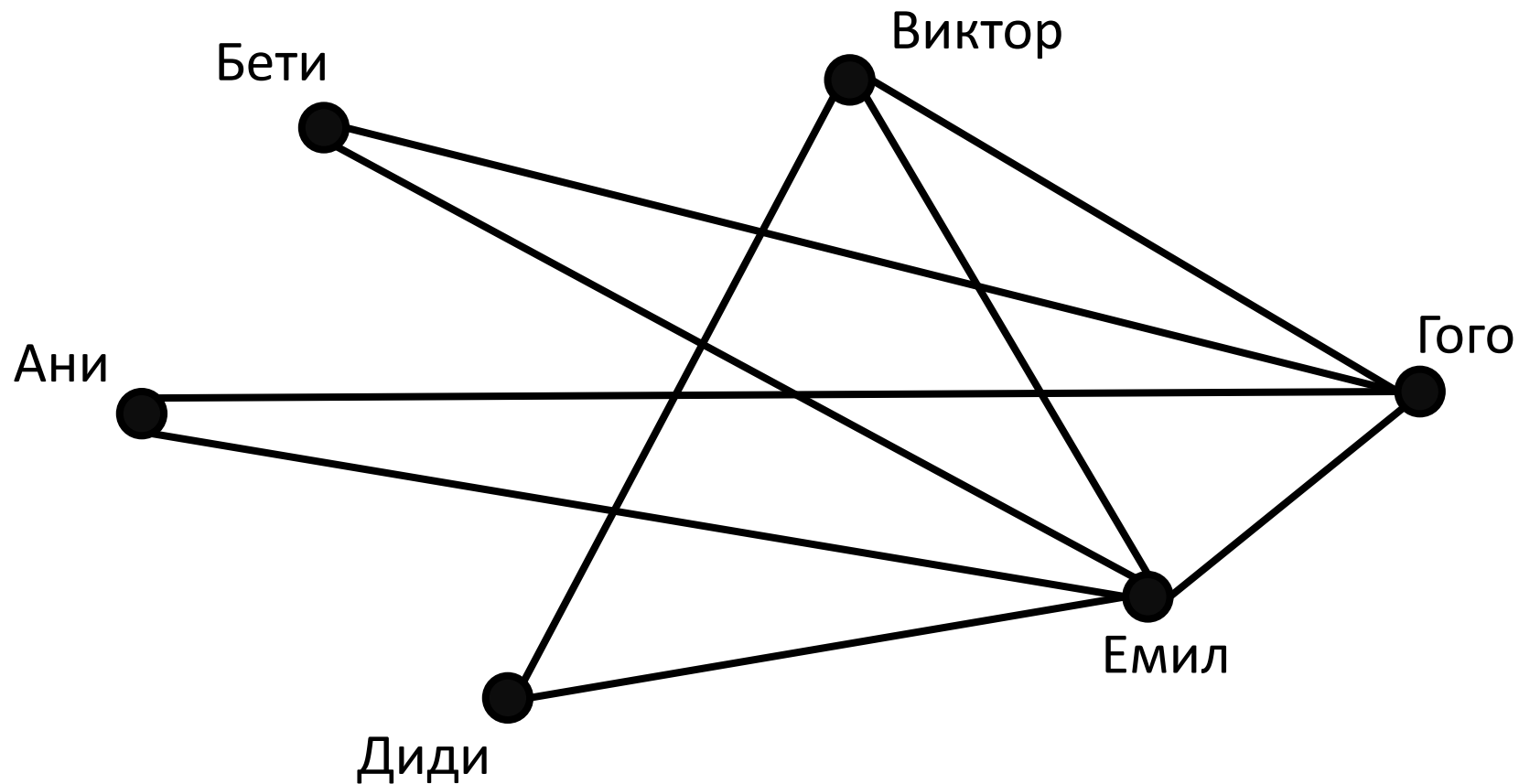




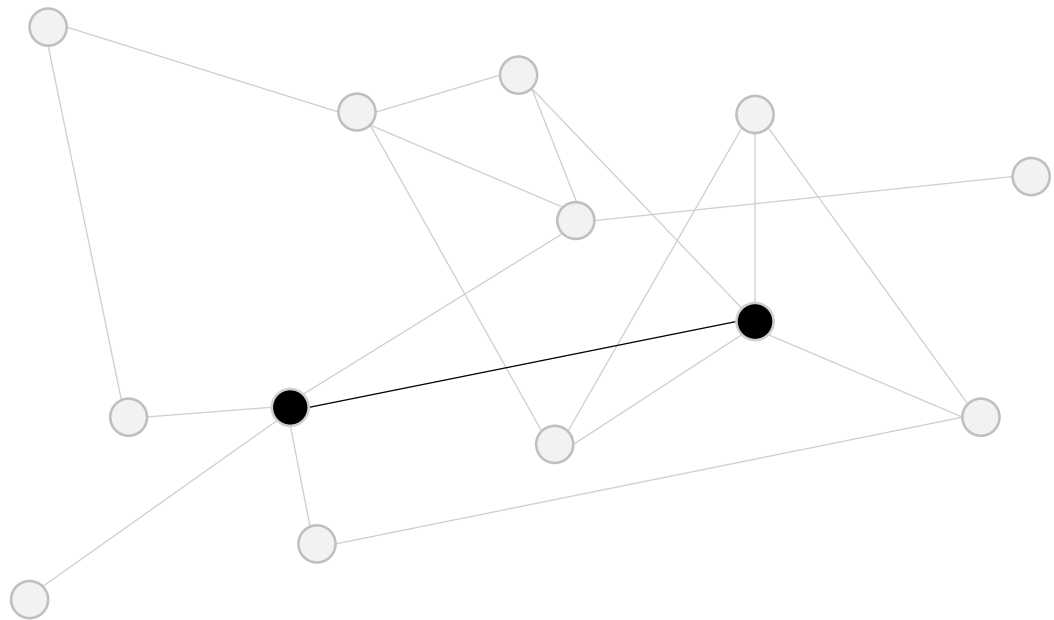
By Ikonact - Собствена творба, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18692190>

Познанства между хора

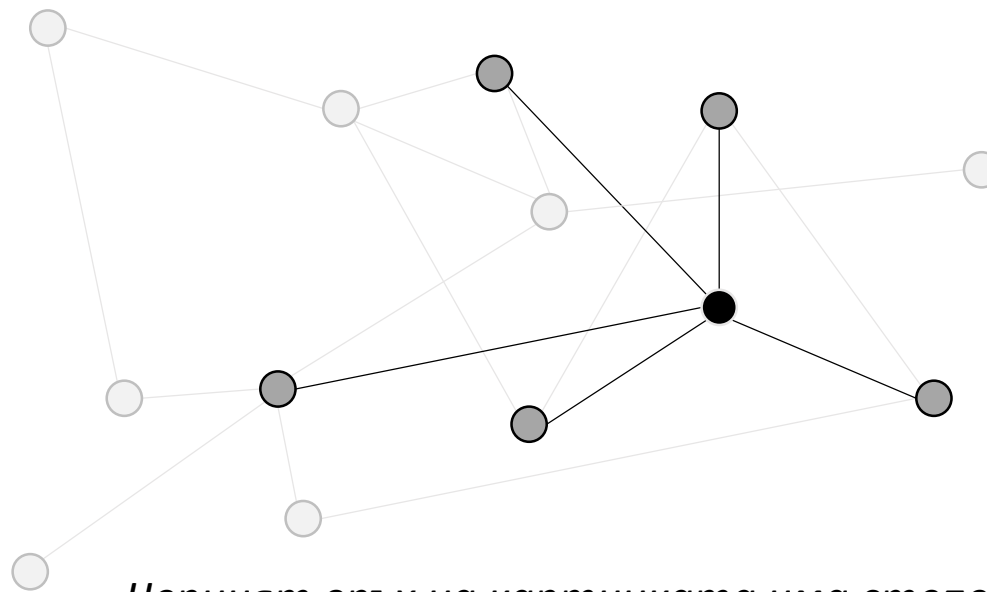
Ани, Бети, Виктор, Гого, Диди и Емил пътуват в едно купе. Ани се познава с Емил и Гого, Виктор познава Диди, а Емил познава Бети, Диди, Гого и Виктор. Гого познава Бети и Виктор. Колко души познава Виктор? (Начетайте графа, съответстващ на познанствата. Всички познанства са взаимни.)



Два върха, свързани с ребро, се наричат **съседни**.



Степента на един връх е броят на съседите му.

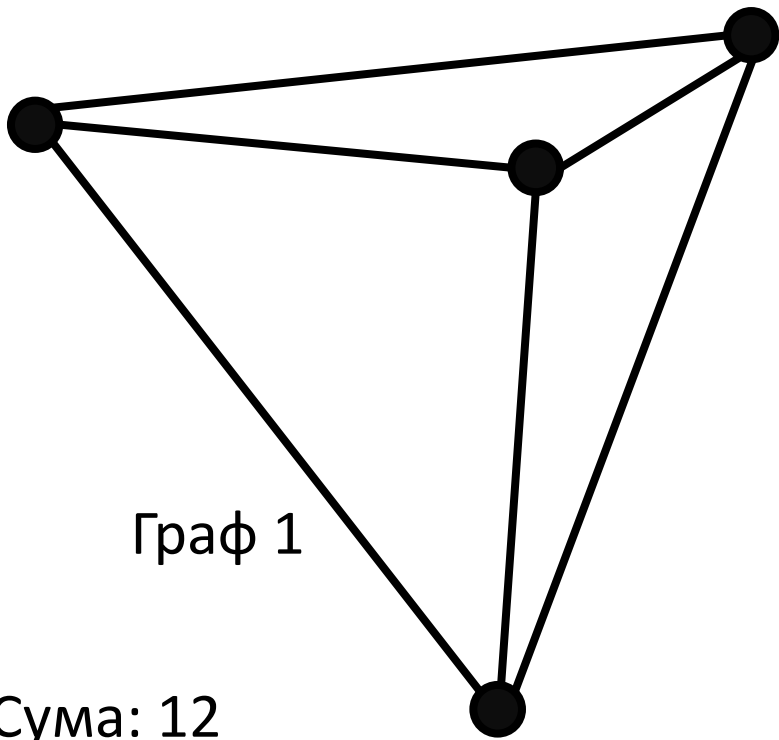


Черният връх на картинката има степен 5.

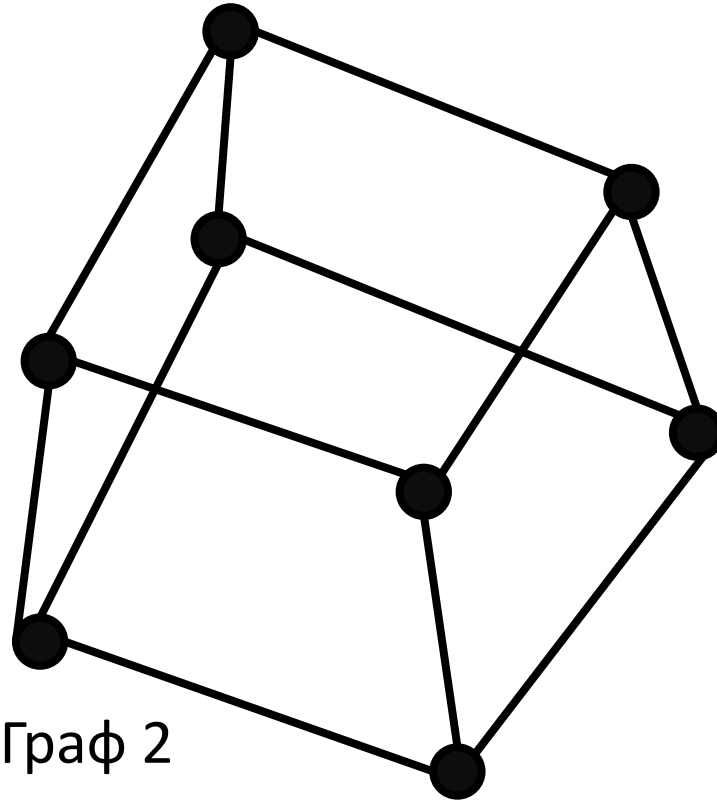
Каква е степента на всеки от върховете?

Колко е сумата от степените на върховете на всеки граф?

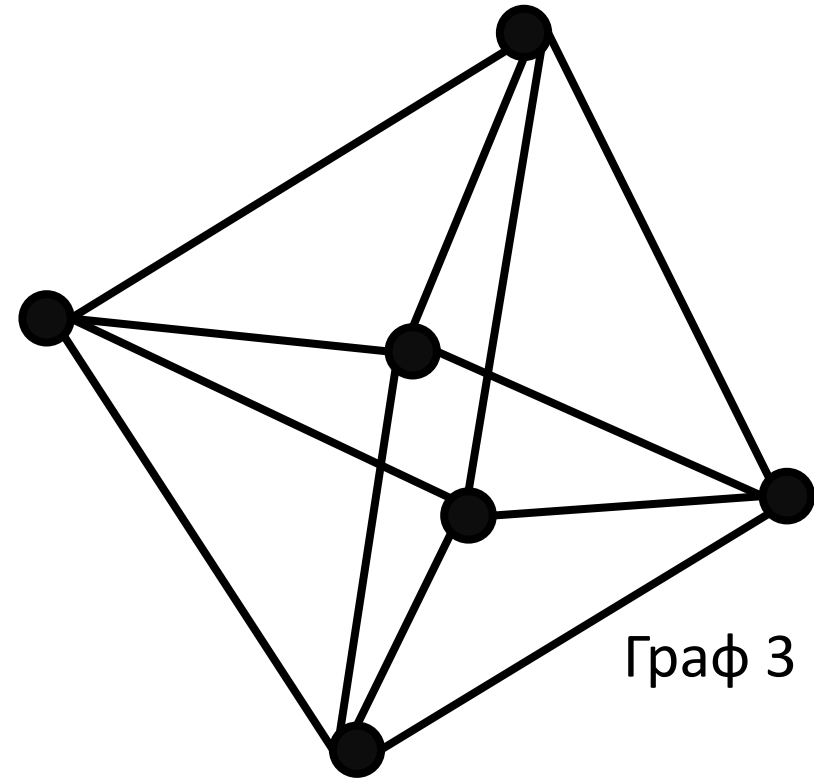
Колко ребра има във всеки от графите?



Сума: 12
Ребра: 6

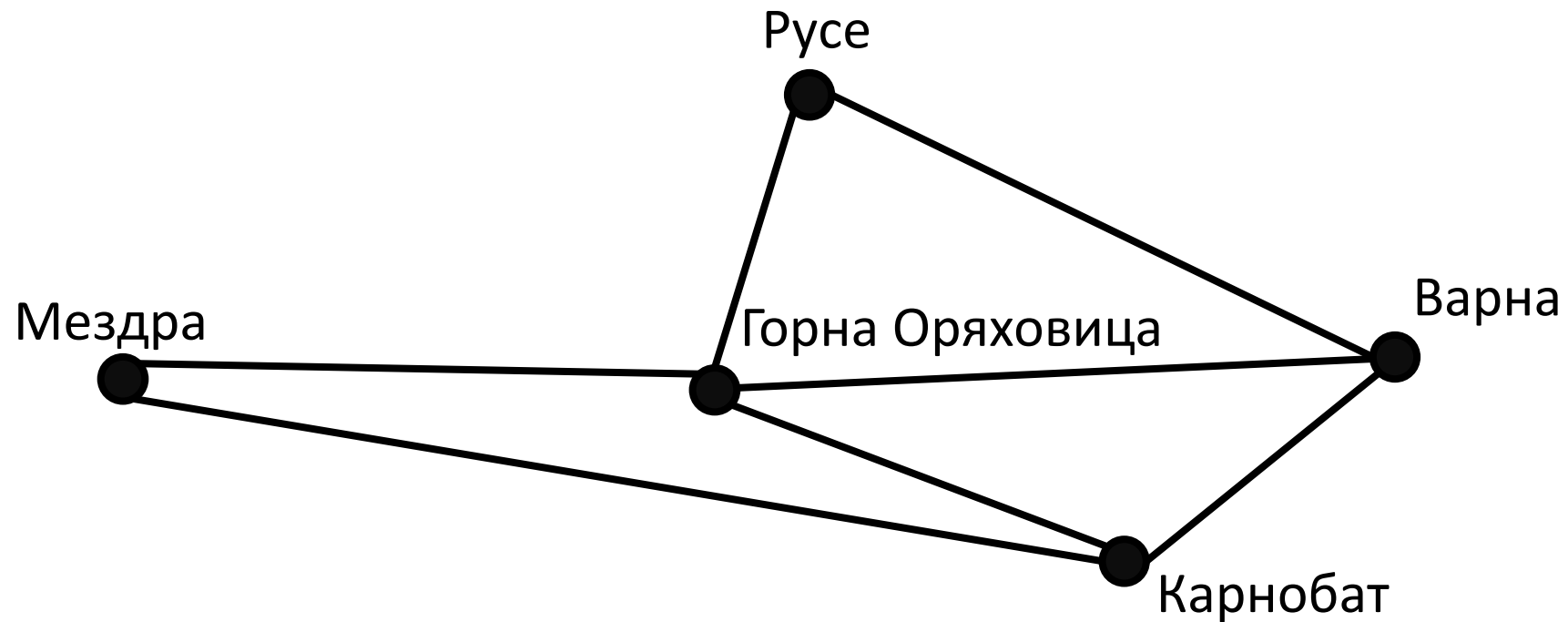


Сума: 24
Ребра: 12



Сума: 24
Ребра: 12

Каква е степента на всеки от върховете?
Колко е сумата от степените на върховете?
Колко ребра има в графа?



Сума: 14

Ребра: 7

Сборът от степените на върховете в един граф е два пъти по-голям от броя на ребрата.

Нека броят ребра е r . Всяко ребро има два края, следователно общия брой краища е $2r$.

От друга страна, можем да преброим краищата по друг начин.

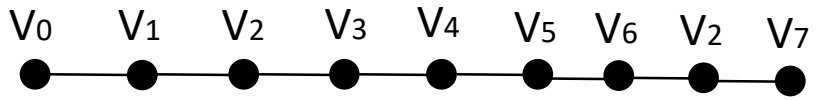
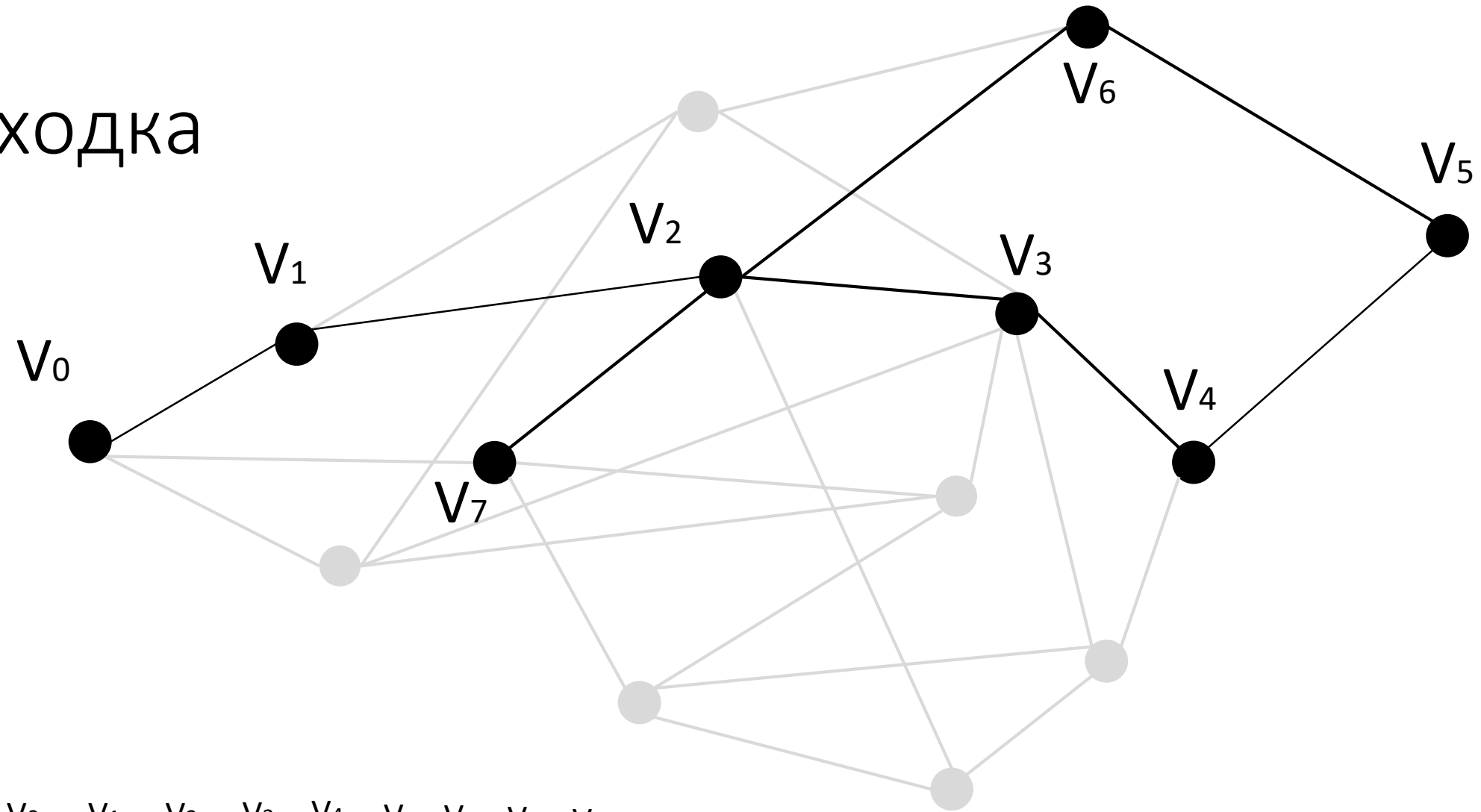
Нека графът има върхове v_1, v_2, \dots, v_n и степента на връх v_i е d_i . Един връх е край на толкова ребра, колкото е степента му. Това означава, че общият брой краища на ребра, е $d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Това дава

$$2r = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$



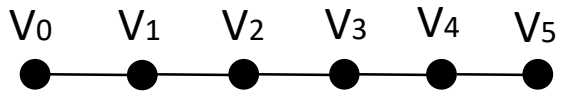
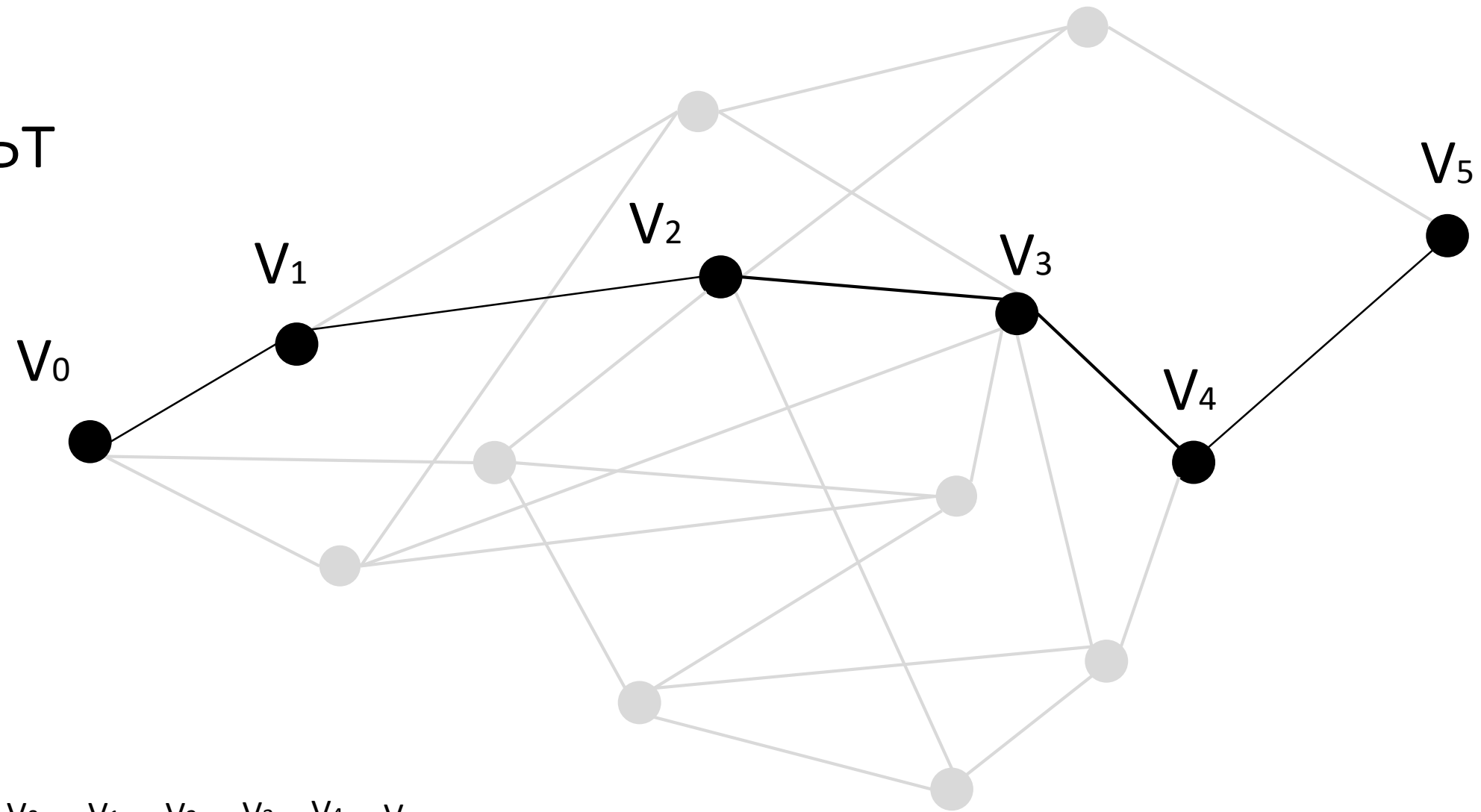
Разходки, пътища и цикли

Разходка



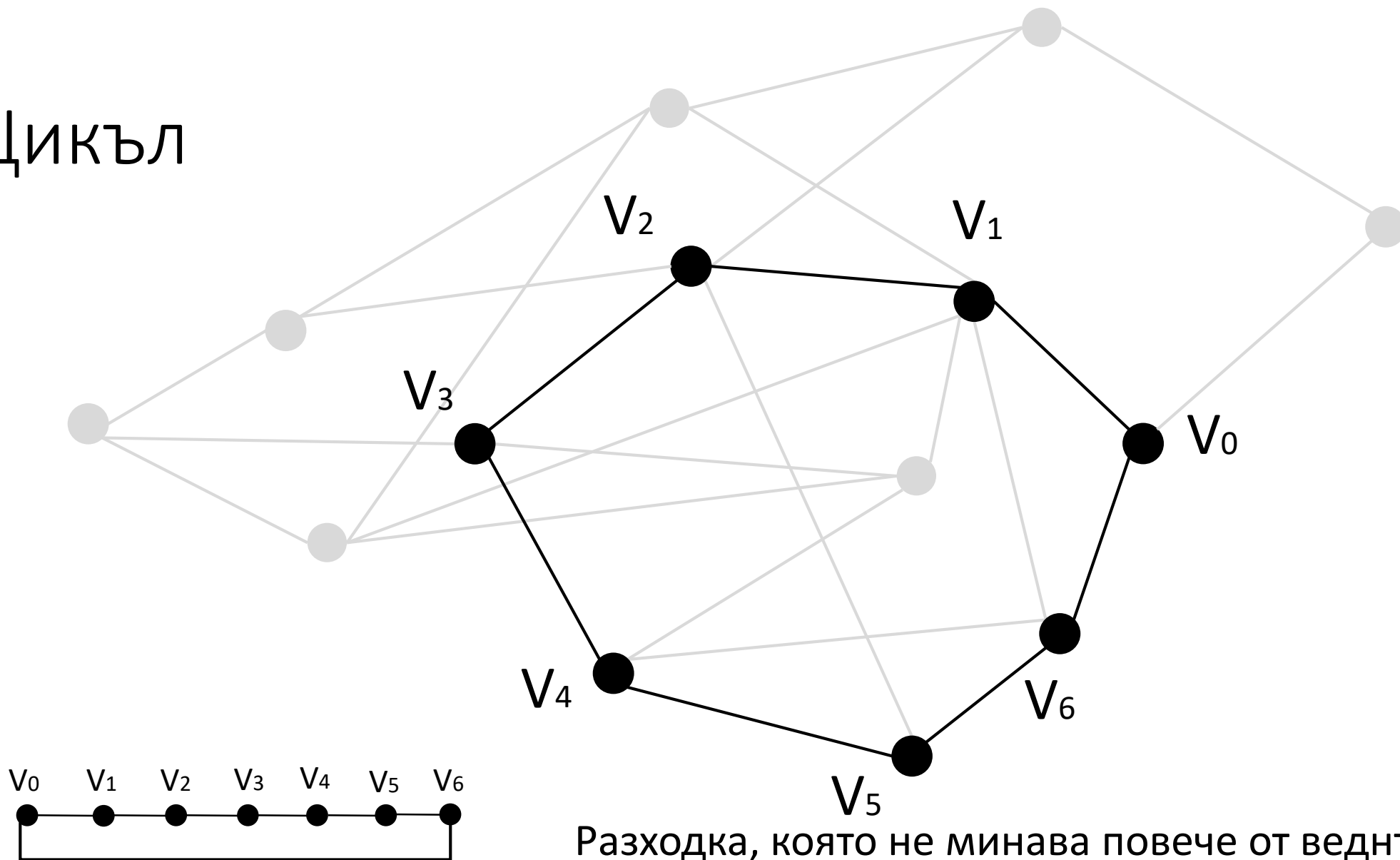
Поредица от върхове, такива, че между всеки два последователни съществува ребро, се нарича **разходка**.

Път



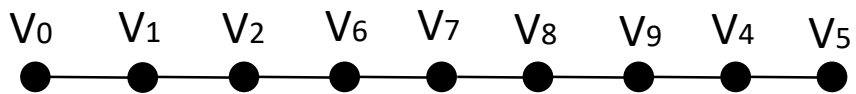
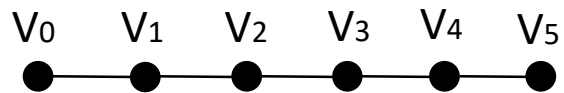
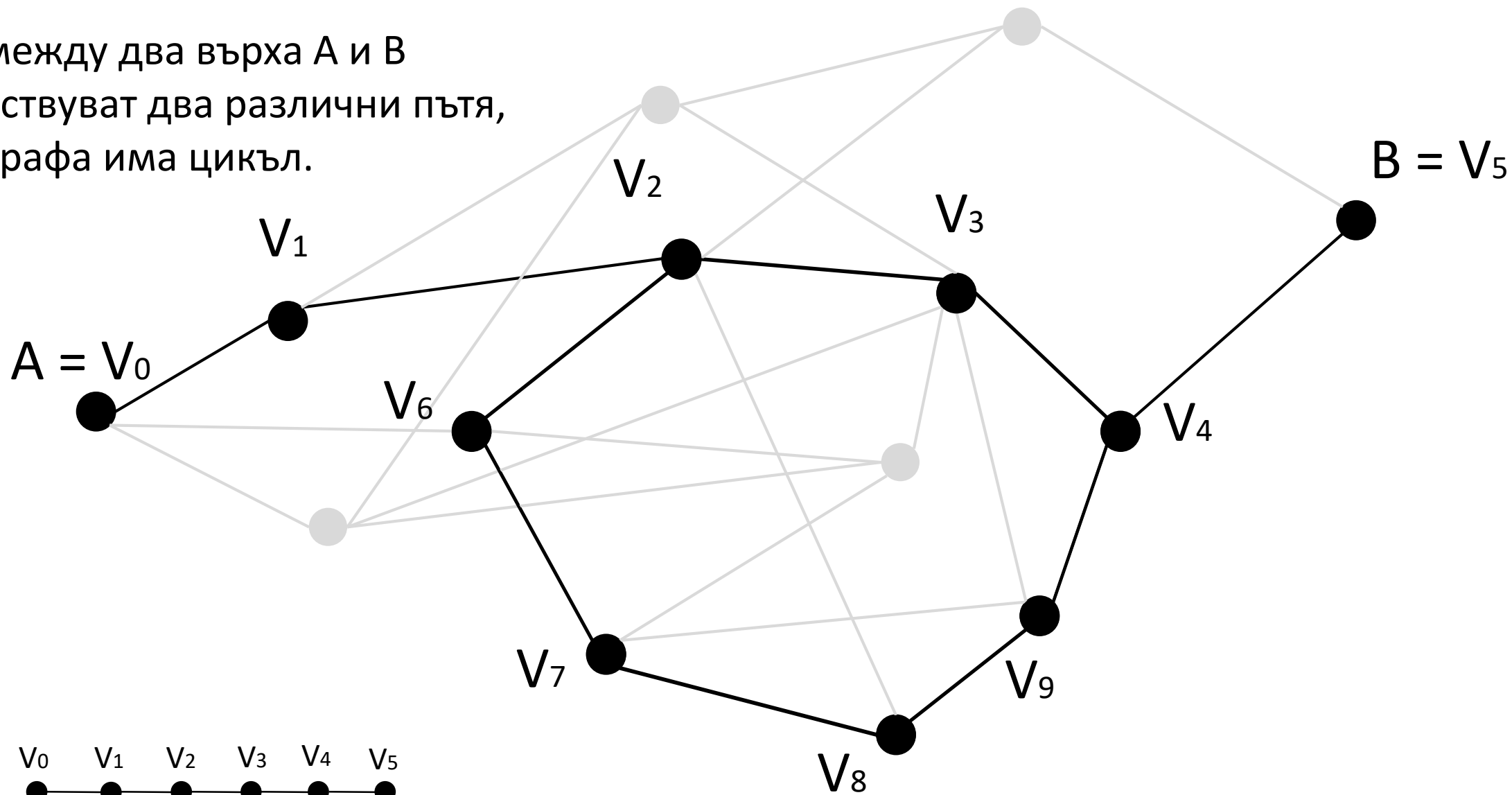
Разходка, която не минава повече от веднъж през никой връх, наричаме **път**.

Цикъл

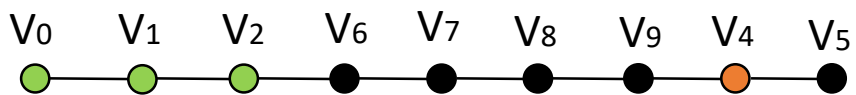
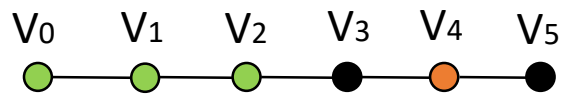


Разходка, която не минава повече от веднъж през никой връх (без първия и последния) и се връща във върха, от който е започнала, се нарича **цикъл**.

Ако между два върха A и B
съществуват два различни пътя,
то в графа има цикъл.



Доказателство: Нека двата пътя между A и B са $Av_1v_2 \dots v_kvB$ и $Aw_1w_2 \dots w_lB$ (където приемаме $A = v_0 = w_0$ и $B = v_{k+1} = w_{l+1}$). Нека v_i е първият връх от път 1, такъв че $v_{i+1} \neq w_{i+1}$ (такъв връх съществува, понеже пътищата са различни). Нека v_j е първият връх от път 1 след v_i , който присъства и в път 2 (такъв връх съществува, понеже B е и в двата пътя).

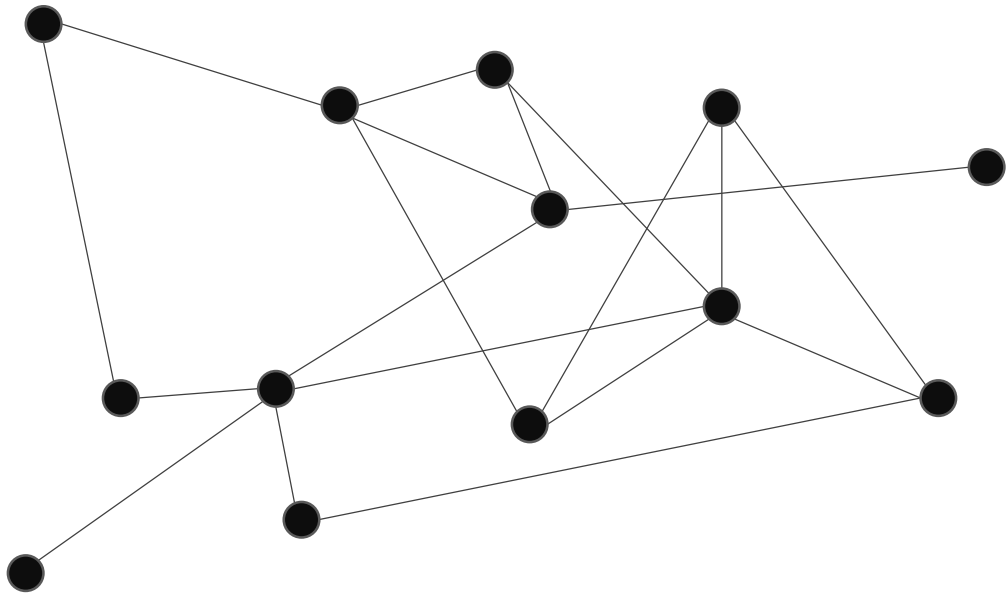


*В примера от предната страница
имаме $v_i = v_2$ и $v_j = v_4$*

Полученият цикъл е $v_2v_3v_4v_9v_8v_7v_6$.

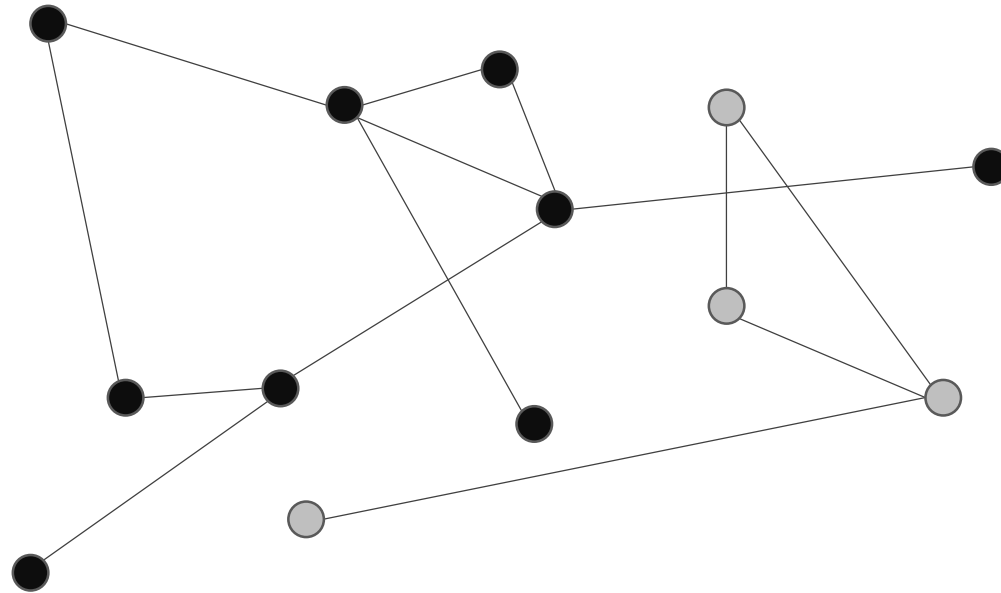
Тогава участъкът от път 1 между v_i и v_j не съдържа връх от път 2. Участъкът от път 1 от v_i до v_j е $v_iv_{i+1} \dots v_j$. Участъкът в път 2 от v_i до v_j е $v_iw_{i+1} \dots w_xv_j$ за някое x . Следователно получаваме цикъла $v_iv_{i+1} \dots v_jw_x \dots w_{i+1}$.

Един граф е **свързан**, ако всеки два негови върха са свързани с път.



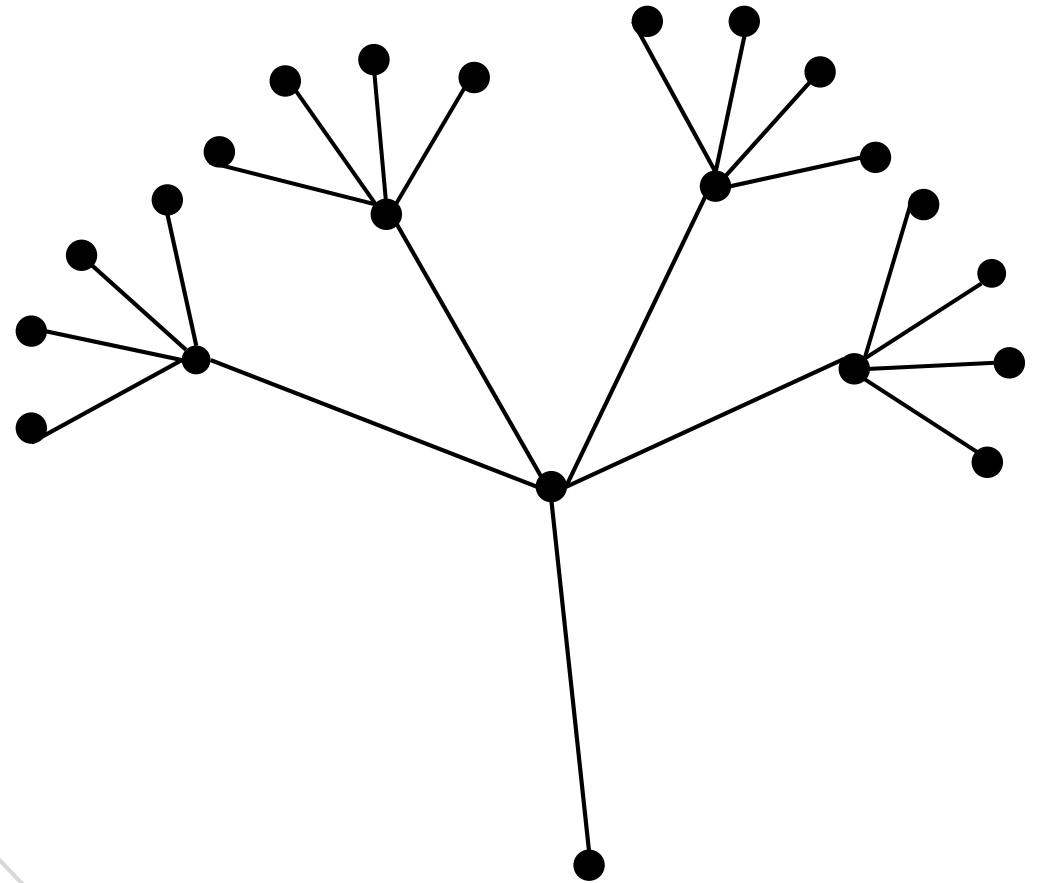
свързан граф

Всеки граф е съставен от свързани **компоненти**.
Един граф е свързан, ако има точно 1 компонента.

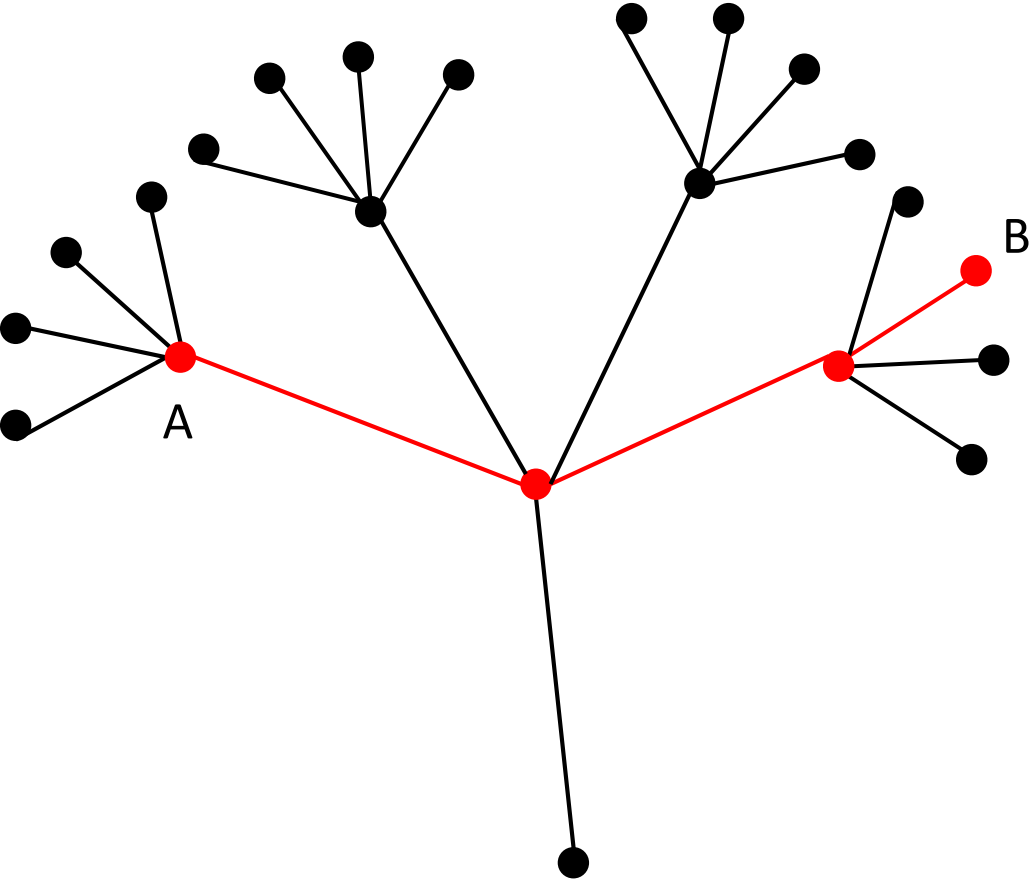


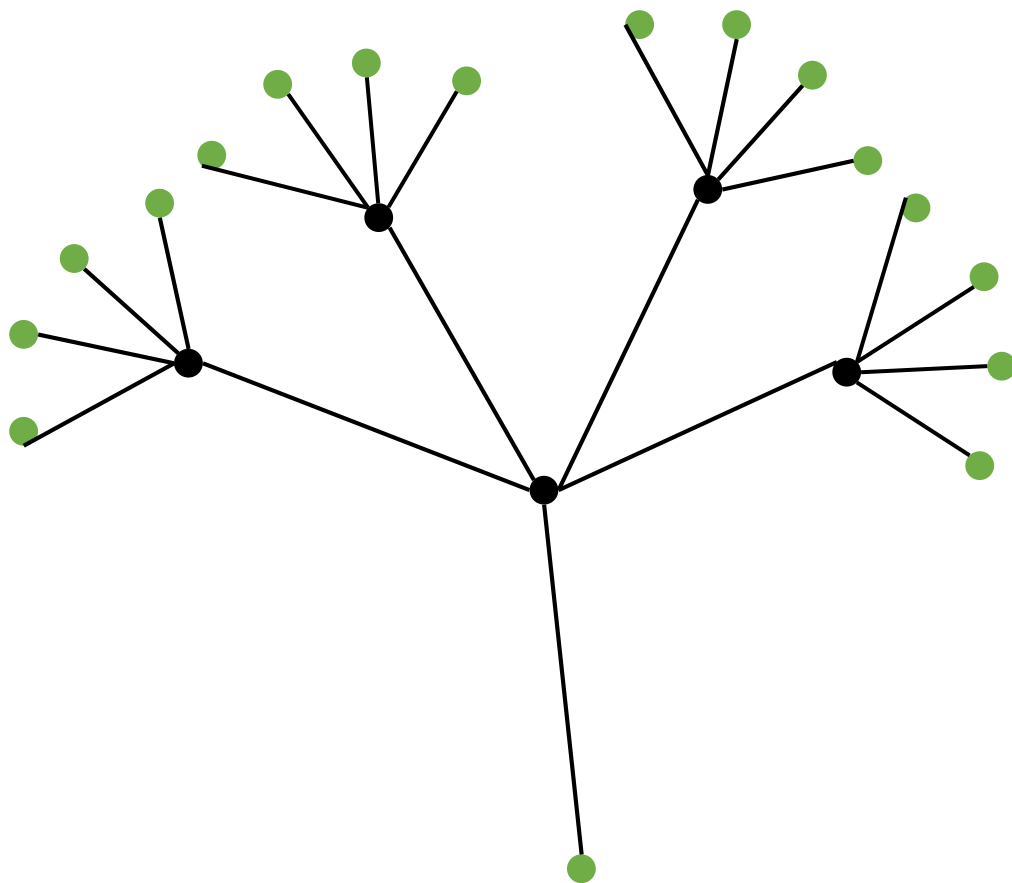
несвързан граф

Графи дървета



Граф, в който между всеки два
върха съществува единствен път,
се нарича **дърво**

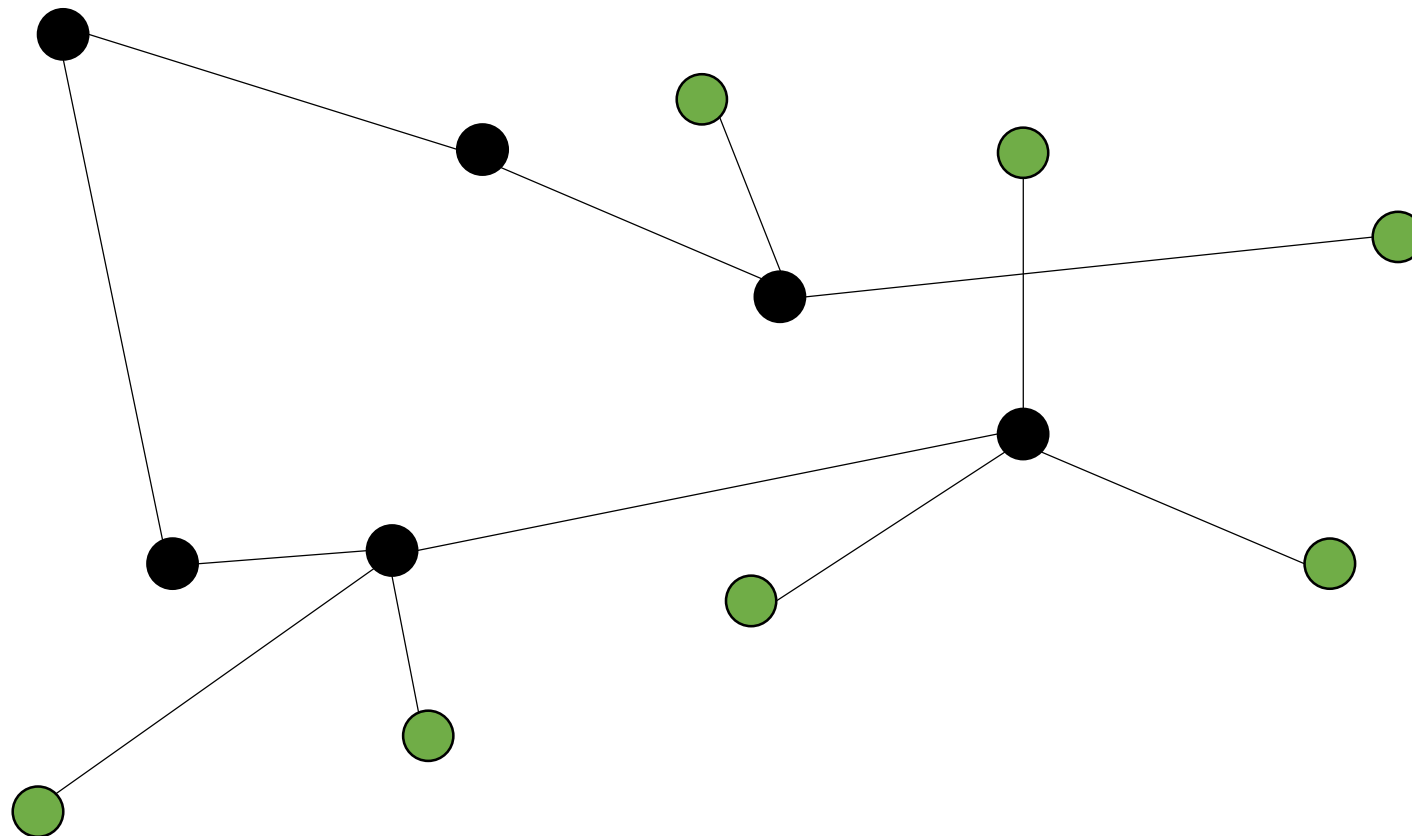




Граф, в който между всеки два върха съществува единствен път, се нарича **дърво**

Листа – върхове от степен 1

Друг пример за дърво



Свойства на графите дървета

Всяко дърво е свързан граф без цикли.

Всеки свързан граф без цикли е дърво.

От всеки свързан граф можем да получим дърво чрез премахване на няколко от ребрата му (може би 0 от ребрата му).

Ако един граф дърво има n върха, то той има $n - 1$ ребра.

Всеки свързан граф с n върха и $n - 1$ ребра е дърво.

Всяко дърво с поне 2 върха съдържа поне едно листо.