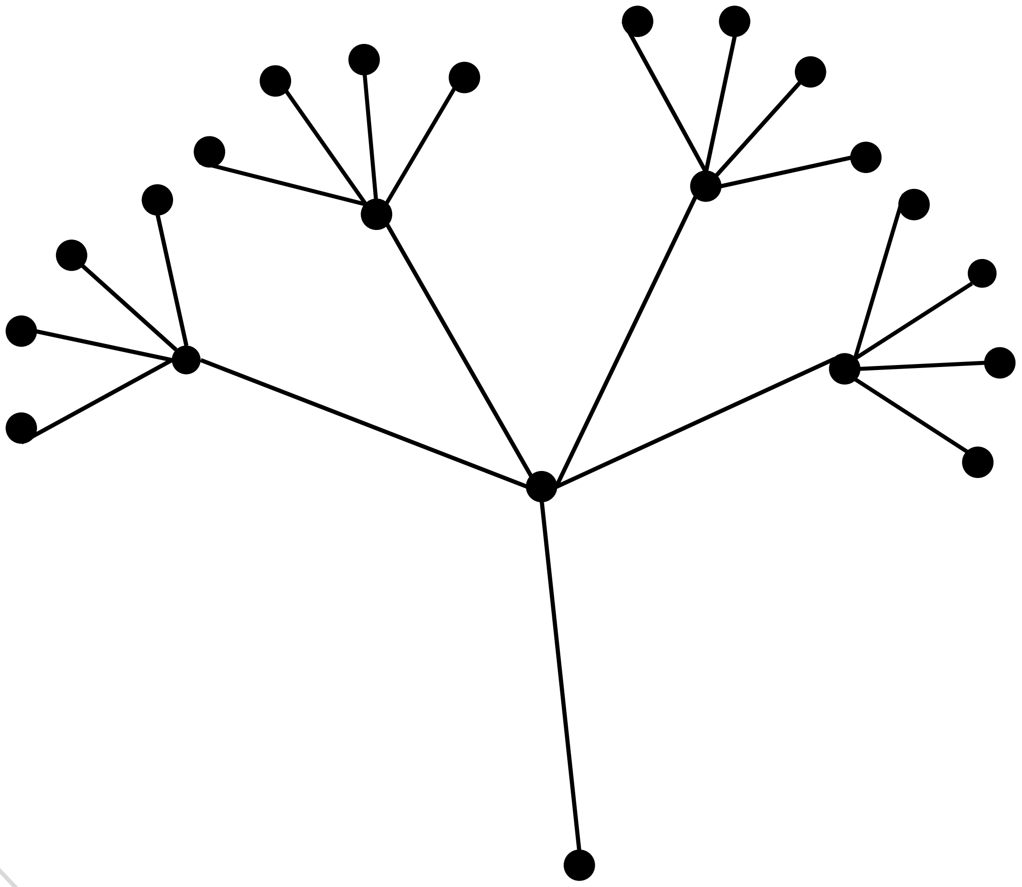
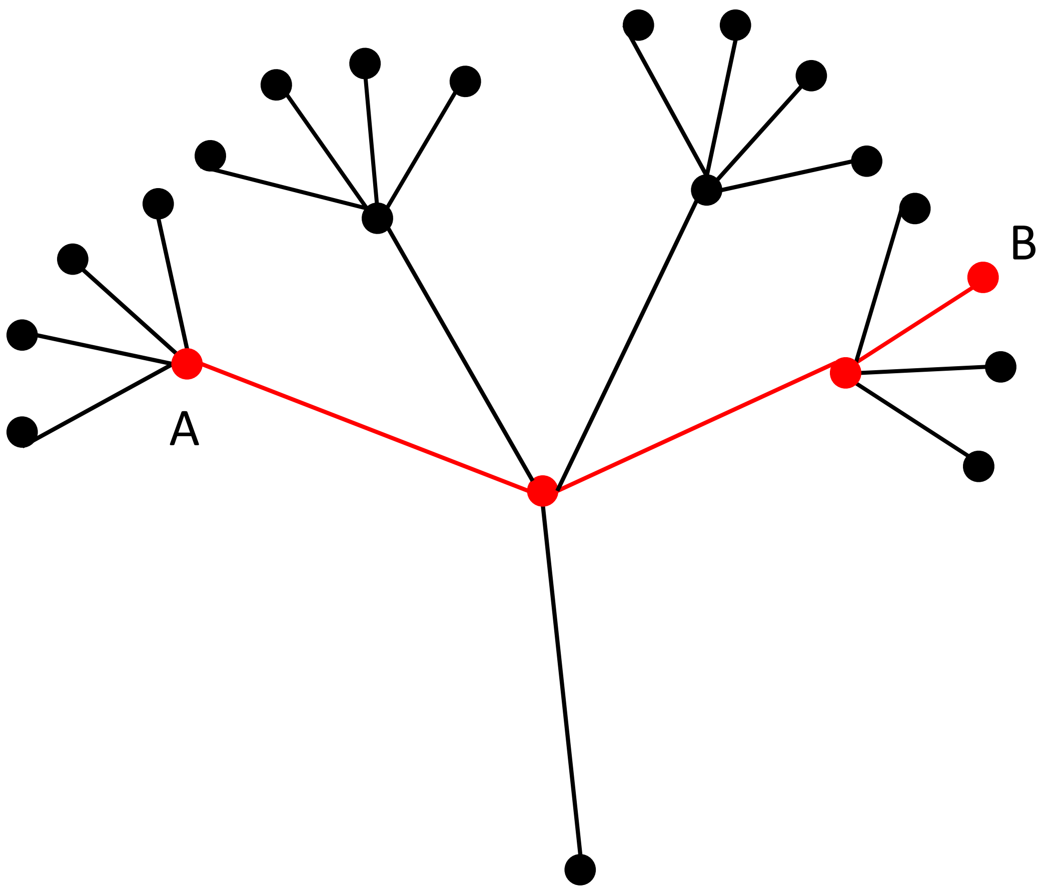
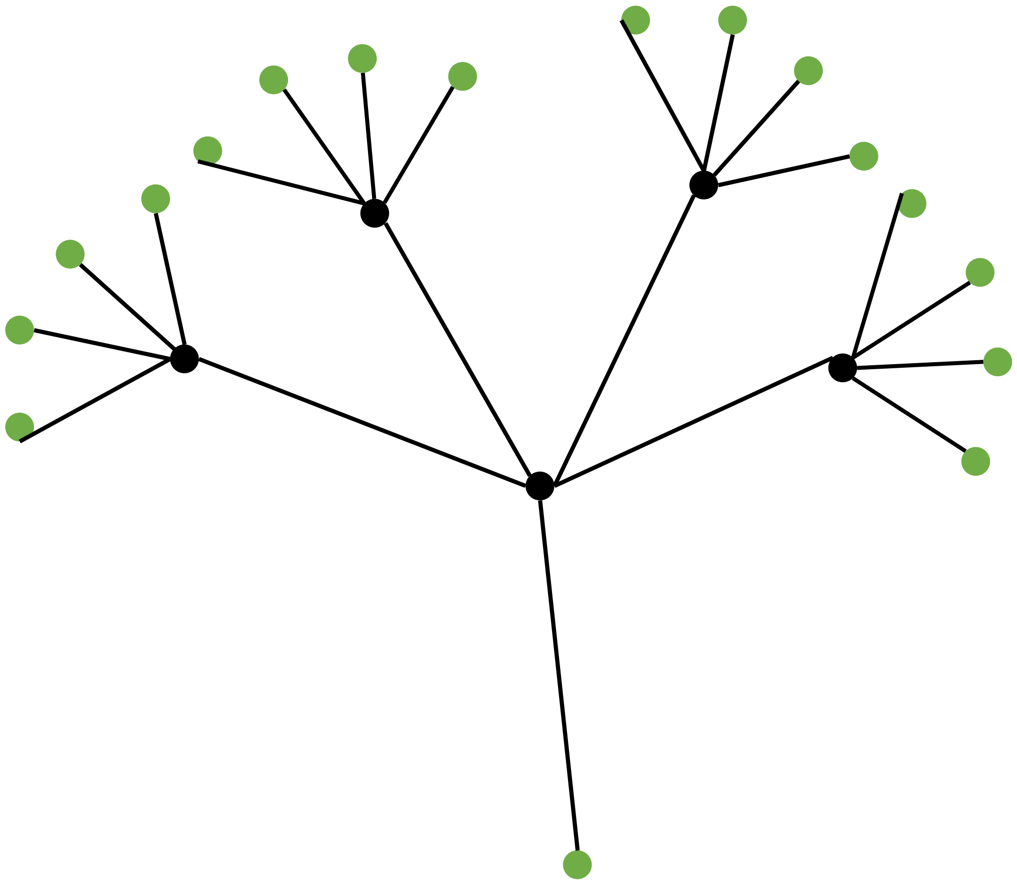
Графи дървета





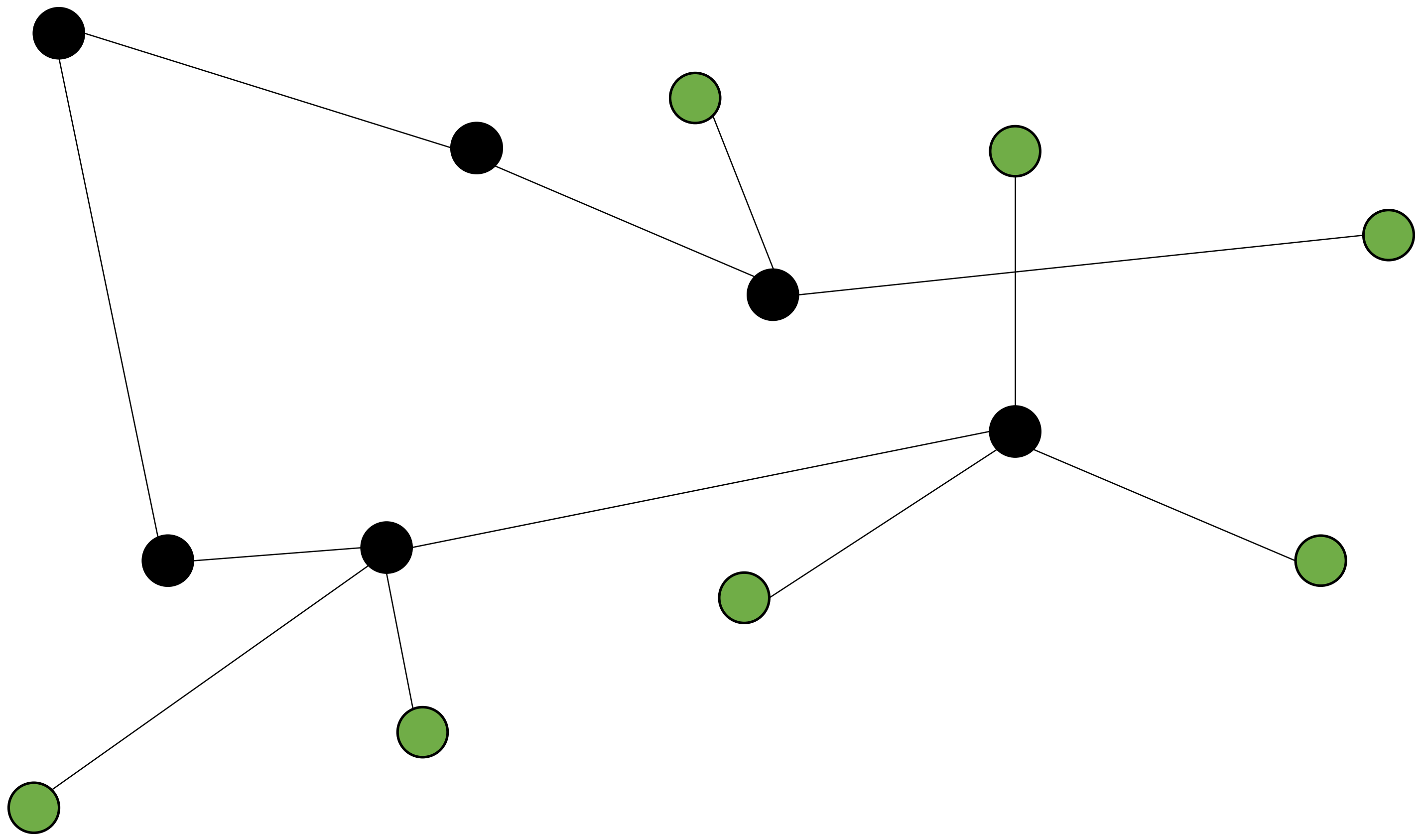
Граф, в който между всеки два върха съществува единствен път, се нарича **дърво**



Граф, в който между всеки два върха съществува единствен път, се нарича **дърво**

Листа – върхове от степен 1

Друг пример за дърво



Свойства на графите дървета

Всяко дърво е свързан граф без цикли.

Всеки свързан граф без цикли е дърво.

От всеки свързан граф можем да получим дърво чрез премахване на няколко от ребрата му (може би 0 от ребрата му).

Ако един граф дърво има n върха, то той има $n - 1$ ребра.

Всеки свързан граф с n върха и $n - 1$ ребра е дърво.

Всяко дърво с поне 2 върха съдържа поне едно листо.

Всяко дърво е свързан граф без цикли.

Вчера доказахме, че ако в един граф има два различни пътя от A до B, то в графа има цикъл.

Също така, ако в графа има цикъл, съдържащ A и B, то имаме два различни пътя от A до B.

По дефиниция дърво е граф, в който имаме единствен път между всеки два върха. Ако имаме цикъл, то имаме повече от един път между някои два върха, противоречие.

Всеки свързан граф без цикли е дърво.

Графът е свързан, следователно има път от всеки връх до всеки друг.

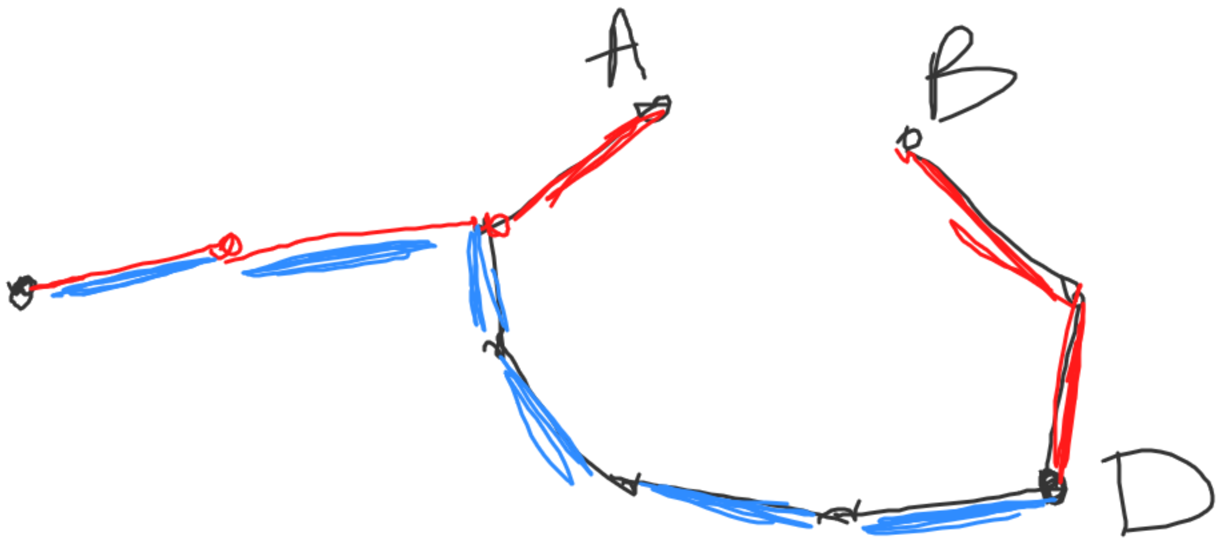
Вчера доказахме, че ако в един граф има два различни пътя от A до B, то в графа има цикъл.

Ако съществува повече от един път между два върха, то в графа има цикъл. Следователно, ако нямаме цикли, то нямаме и повече от един път. .

От всеки свързан граф можем да получим дърво чрез премахване на няколко от ребрата му (може би 0 от ребрата му).

Стратегия: Ако има цикъл в графа, избираме едно от ребрата в цикъла и го премахваме.

Трябва да сме сигурни, че това запазва "свързаността" на графа. Ако изтрием реброто AB, което участва в цикъл, да разгледаме два върха C и D (може би някой от тях е A или B). Ако пътят от C към D минава през реброто AB, то можем да образуваме разходка, която не минава през AB, започва в C и завършва в D. Съществуването на разходка означава съществуването на път (това е част от упражненията на сайта).



Ако един граф дърво има n върха, то той има $n - 1$ ребра.

Ще докажем твърдението по индукция по n.
(1) База: $n = 1$. Дърво с 1 връх е просто 1 връх и съответно има 0 ребра.

(2)Индукционна хипотеза: за всяко n<к твърдението е изпълнено.

(3)Индукционна стъпка: Разглеждаме случая n=к.

Изтриваме ребро от графа. Колко свързани компоненти можем да получим?
Да допуснем, че получаваме свързан граф и изтритото ребро е АВ. Това означава, че има път от А до В, който не минава през реброто АВ. Но понеже самото ребро АВ е различен път от А до В в началния граф (без изтритото ребро), то в началния граф сме имали два пътя от А до В. Но той е граф дърво, противоречие.
Не можем да получим и повече от 2 компоненти. Следователно при изтриване на ребро получаваме точно 2 компоненти. Всяка от тях е граф дърво (защо?).
Ако едната има х върха, то по индукционната хипотеза (имаме х<к) в тази компонента има х-1 ребра. В другата компонента имаме к-х (и пак к-х<к) върха и по индукционната хипотеза имаме к-х-1 ребра. Общият брой ребра е (х-1)+(к-х-1)=к-2.
Този брой ребра е получен след изтриване на едно ребро от началния граф дърво, т.е. сме имали к-1 ребра.

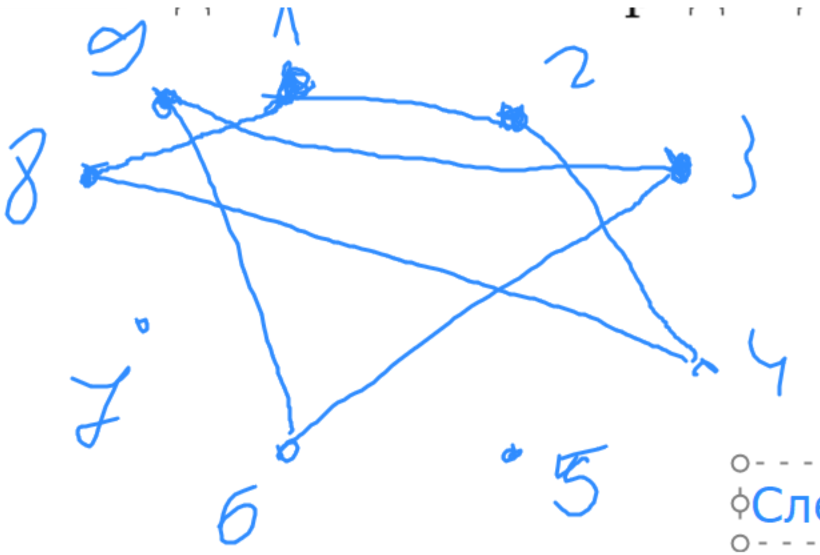
Всеки свързан граф с n върха и $n - 1$ ребра е дърво.

Насока: Разглеждаме $n > 1$. Нека графът е G. G е свързан, следователно всеки връх е от степен поне 1. Броят ребра е по-малък от n, което означава, че сумата от степените е $< 2n$, т.е. трябва да имаме връх от степен 1. Махайки този връх от графа, получаваме свързан граф с $n - 1$ и $n - 2$ ребра. Използвайки този факт, можем да докажем твърдението по индукция (как?).

Всяко дърво с поне 2 върха съдържа поне едно листо.

Подсказка: Какъв е минималният брой ребра, ако всеки връх е от степен поне 2?

1. На един остров има 9 града, номерирани с числата от 1 до 9. Два града са свързани с път точно когато двуцифреното число, съставено от цифрите им, се дели на 9. Можем ли да стигнем от град 1 до град 9?



За да получим сбор, делящ се на 3, трябва да съберем 9 с 6 или 3, 6 с 9 или 3, 3 с 6 или 9. Т.е. върховете, съответстващи на 3,6 и 9 образуват компонента в нашия граф.

Следователно нямаме път от 1 до 9.

2. На един остров има 88 града, някои от които са свързани с двупосочен път. От градовете A и B излизат по 3 шосета, а от всички останали - по 4. Сигурно ли е, че можем да стигнем от A до B?

Създаваме в граф, в който върховете са градовете (т.е. 88 върха). Свързваме два върха с ребро, ако съответстващите им градове са свързани с двупосочен път. От А и В излизат 3 ребра (т.е. А и В са от степен 3), докато всички останали върхове са от степен 4.

Да допуснем, че съществува граф, изпълняващ условието, в който няма път от А до В. Т.е. А и В се намират в различни компоненти.

Да разгледаме компонентата, съдържаща А. В нея А е от степен 3, докато всички останали върхове са от степен 4.

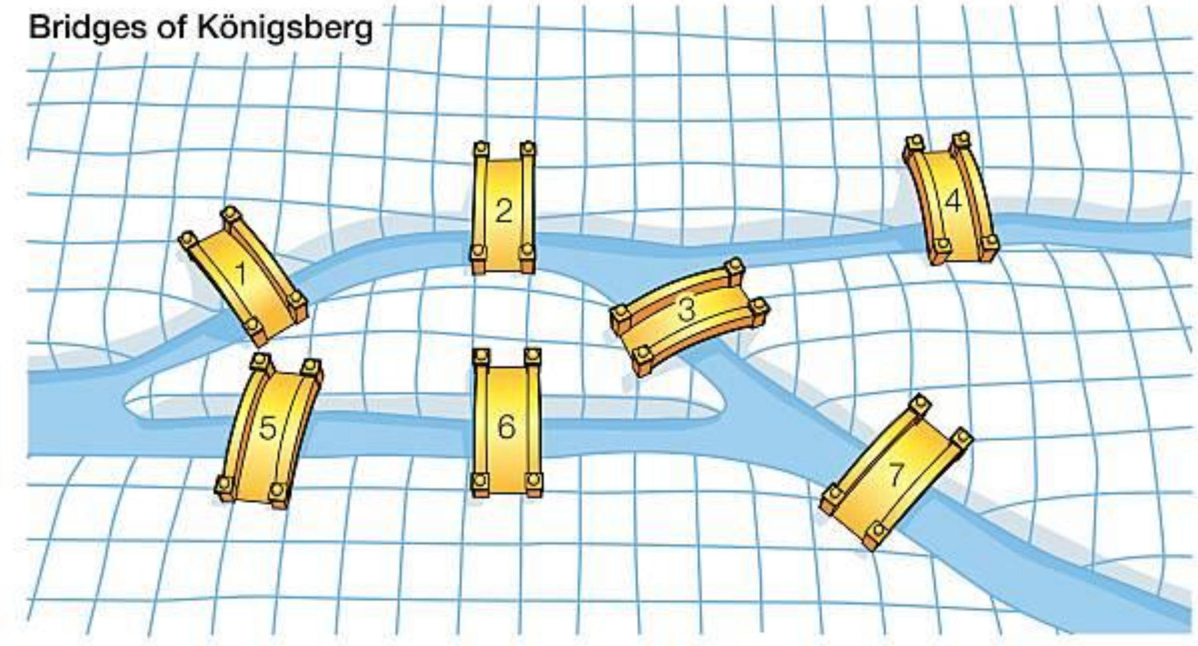
Знаем, че сборът от степените на върховете в компонентата на А е два пъти по-голям от броя на ребрата в компонентата. Но това означава, че сборът е четен. От друга страна, имаме 3+4x за сбора от степените, което е нечетно, противоречие.

Следователно във всеки граф , изпълняващ условието, има път от А до В.

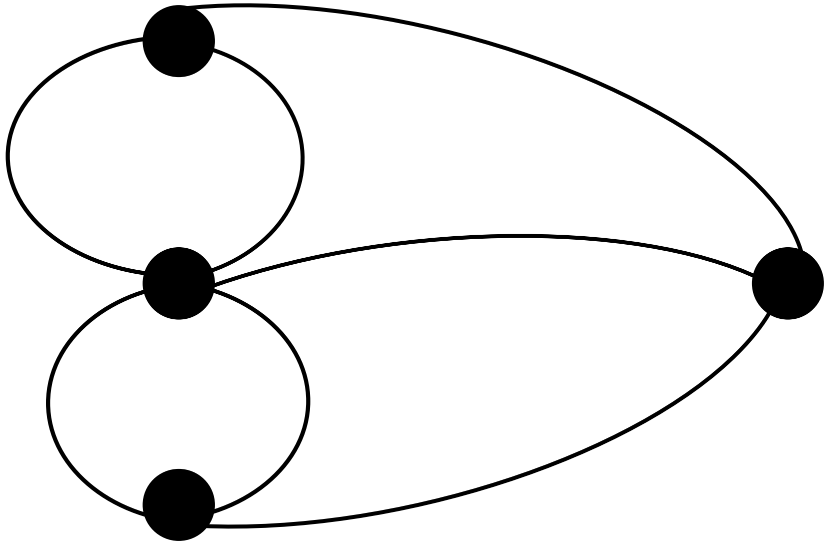
Ойлерови пътища и цикли

Леонард Ойлер

Мостовете на Кьонигсберг



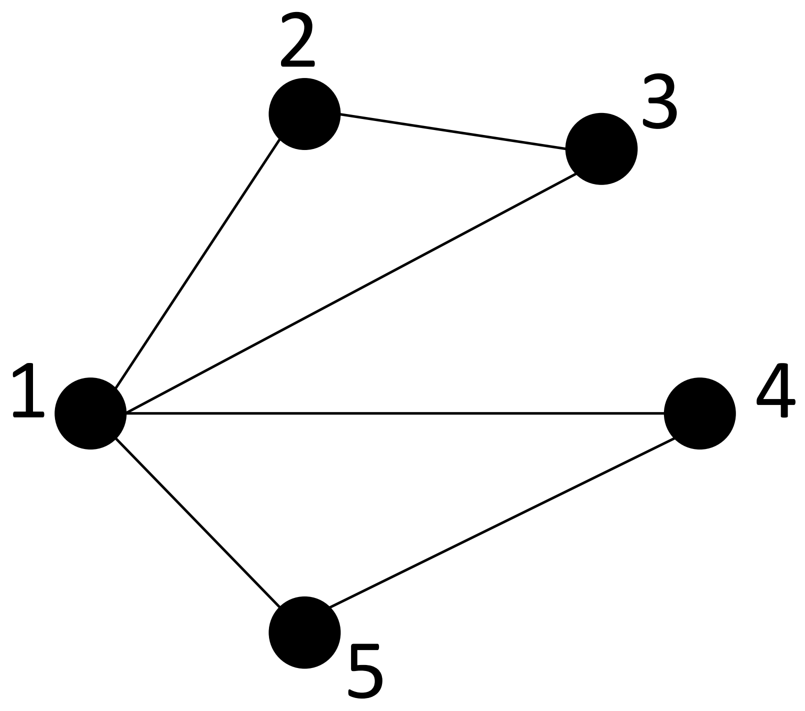
Encyclopædia Britannica, https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem/images-videos#/media/1/321794/68671



Можем ли да преминем по всеки мост точно по веднъж?

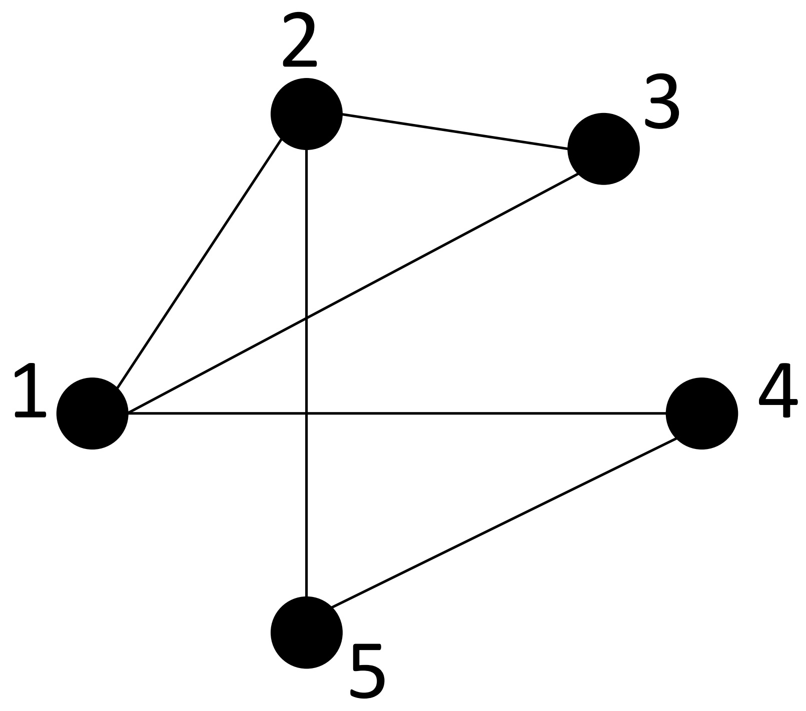
Забележка: по-добри названия биха били „Ойлерова затворена разходка“ и „Ойлерова разходка“

Ойлеров цикъл в един граф е разходка, който минава през всяко ребро точно веднъж и завършва във върха, в който е започнала.



1-2-3-1-4-5-1

Ойлеров път в един граф е разходка, който минава през всяко ребро точно веднъж.



1-2-3-1-4-5-2