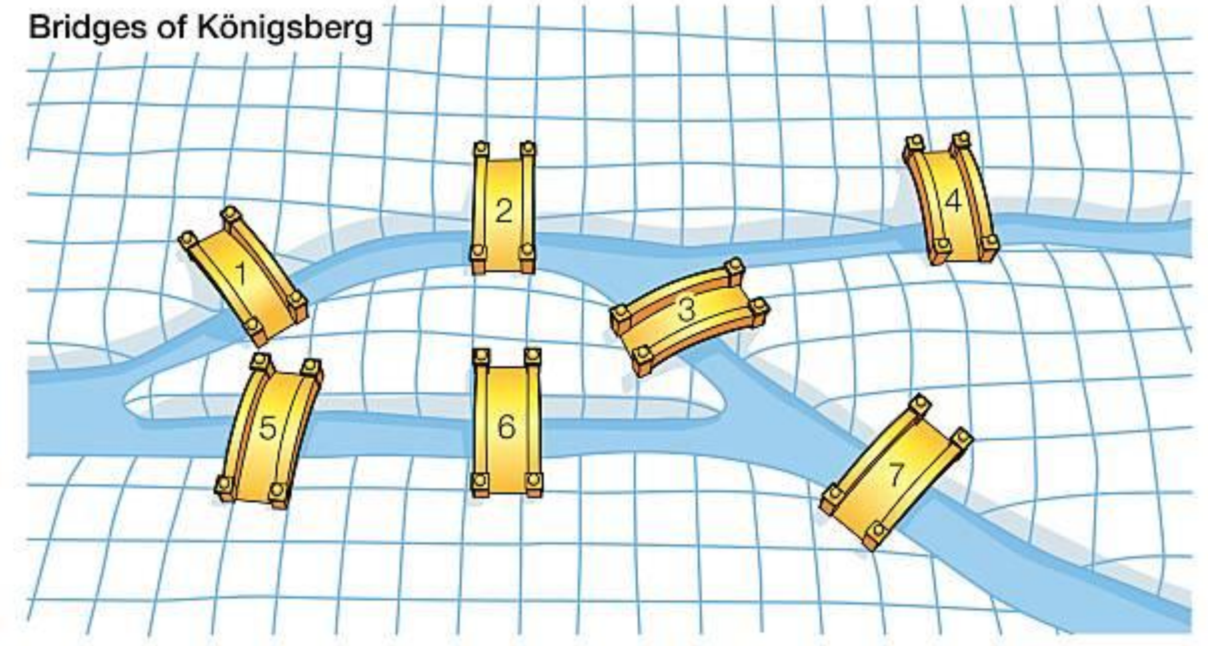
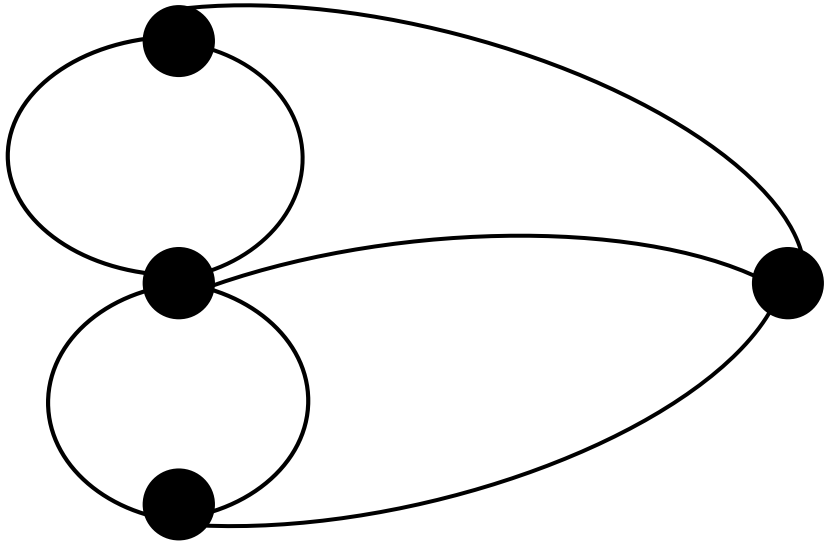
Ойлерови пътища и цикли

Леонард Ойлер

Мостовете на Кьонигсберг



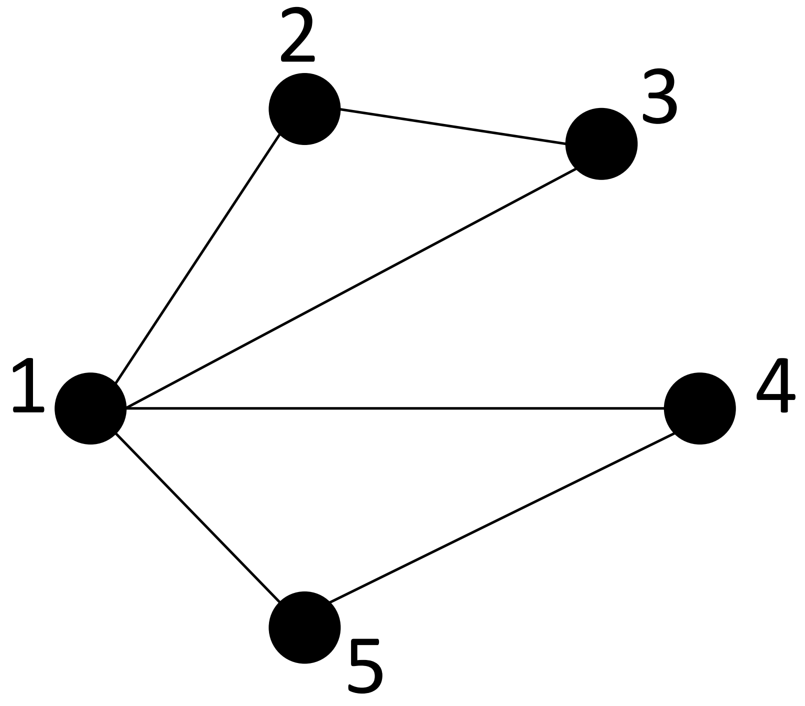
Encyclopædia Britannica, https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem/images-videos#/media/1/321794/68671



Можем ли да преминем по всеки мост точно по веднъж?

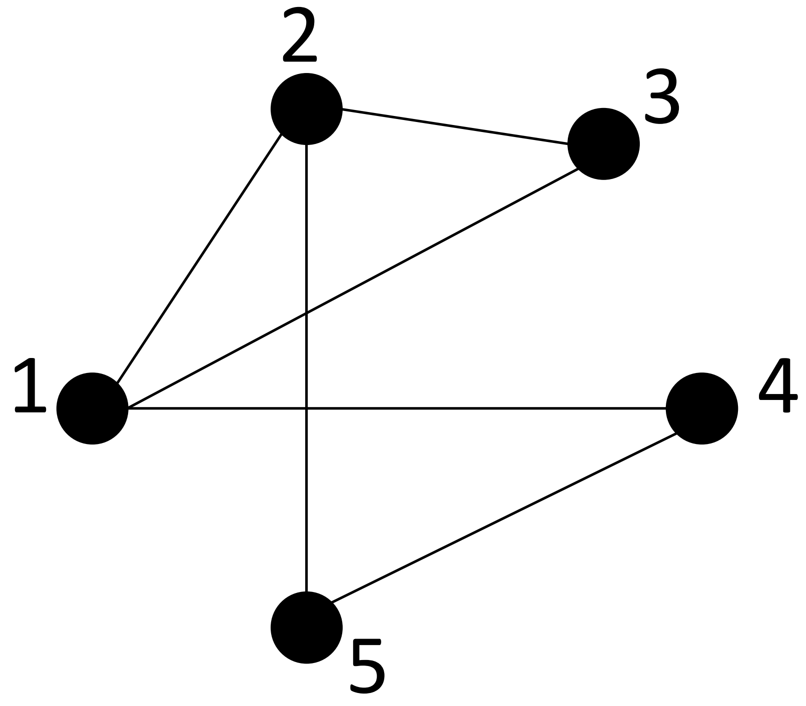
Забележка: по-добри названия биха били „Ойлерова затворена разходка“ и „Ойлерова разходка“

Ойлеров цикъл в един граф е разходка, който минава през всяко ребро точно веднъж и завършва във върха, в който е започнала.



1-2-3-1-4-5-1

Ойлеров път в един граф е разходка, който минава през всяко ребро точно веднъж.

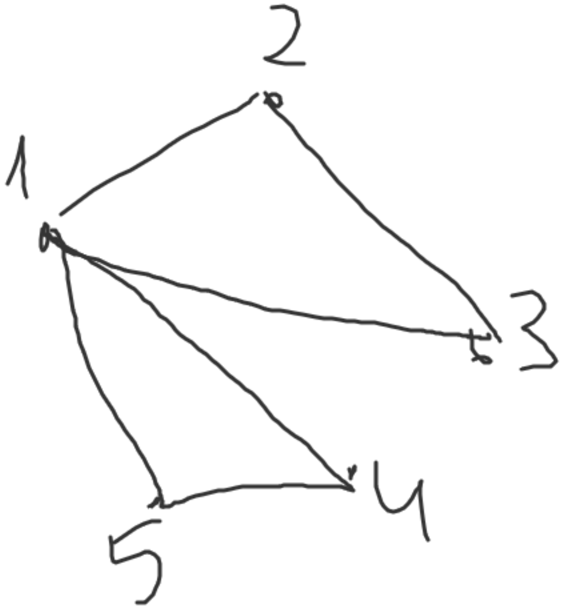


1-2-3-1-4-5-2

Теорема: Един граф съдържа Ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато всички негови върхове са от четна степен и всички върхове от ненулева степен се намират в една и съща компонента

(1)Ако графът има Ойлеров цикъл, то всеки негов връх е от четна степен.

Да допуснем, че графът има Ойлеров цикъл. Нека той е v_1, v_2, ..., v_k (където k-1 е броят ребра в графа и върховете v_1, ..., v_k не са задължително различни).



1 2 3 1 4 5 1

Понеже v_1, ..., v_k е Ойлеров цикъл, то имаме v_1 = v_k

Ако A е връх, който не е v_1 и сме минали през него k пъти, то всеки път сме влезли по едно ребро и сме излезли по друго. Ойлеровият цикъл минава точно веднъж по всяко ребро от графа, т.е. сме минали точно веднъж по всяко ребра, които имат край A. Можем да ги групираме на групички по две (влизащо, излизащо), което означава, че степента на A е 2k. Ако A=v_1, имаме 1 ребро в началото и 1 ребро в края и по 2 ребра за всяко "междинно" посещение, т.е. общо 1+2+2+...+2+1=степента на v_1, т.е. степента на A отново е четна.
Следователно всеки връх е от четна степен.

(2) Да допуснем, че всички върхове от ненулева степен в графа имат четна степен и принадлежат на една и съща компонента. Искаме да докажем, че съществува Ойлеров цикъл.

Свойства на граф дървета:
-ако G е граф дърво с n върха, то той има n-1 ребра.
-ако G е свързан граф без цикли, то G е дърво

Твърдение: В свързан граф G, в който най-малката степен е >=2, задължително има цикъл.
Нека в граф G има n върха

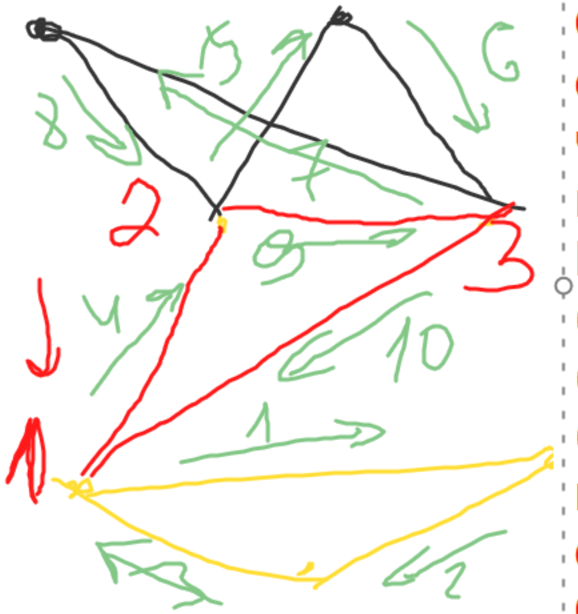
Да допуснем противното - G е граф, в който най-малката степен е поне 2, G е свързан и в G няма цикъл. Това означава, че G е дърво, т.е. G има n-1 ребра.
Знаем, че 2.(брой ребра) = сума от степените на върховете.
Всеки връх е от степен поне 2, т.е. сумата от степените е поне 2.n. Но имаме, че 2.(броят ребра) = 2(n-1)<2.n<=сума от степените на върховете, противоречие.

Следователно в G има цикъл.

Насоки за доказателството на теоремата

(2) Да допуснем, че всички върхове от ненулева степен в графа имат четна степен и принадлежат на една и съща компонента. Искаме да докажем, че съществува Ойлеров цикъл.

Нека компонентата, която съдържа всички върхове от ненулева степен, е G. (махаме всички върхове от нулева степен от графа).



G е свързан граф, в който всеки връх е от четна ненулева степен, т.е. в G има цикъл. Нека го вземем и изтрием ребрата му от графа. Степента на всеки връх от цикъла намалява 2. Степента на всички останали върхове остава непроменена. Следователно отново имаме, че всички степени в графа са четни, но е възможно да сме получили няколко компоненти.
Правим индукция по броят на ребрата в G:
(1) Ако в G има две ребра - може.
(2)Индукционна хипотеза: Ако в G има не повече от 2m ребра
(3)Индукционна стъпка: Да допуснем, че в G има 2m+2 реба. Във всяка от компонентите, които съдържат върхове от ненулева степен, има Ойлеров цикъл, то можем да "съединим" различните Ойлерови цикли в компонентите, използвайки цикъла, който изтрихме от G, за да получим Ойлеров цикъл в G.

Ако в един граф всеки връх е от четна степен, то можем да разбием графа на цикли, всеки два от които не споделят нито едно ребро.

Подсказка: Във всяка от компонентите съществува „локален“ Ойлеров цикъл. Можем ли да разбием един Ойлеров цикъл на цикли, които не споделят ребра?

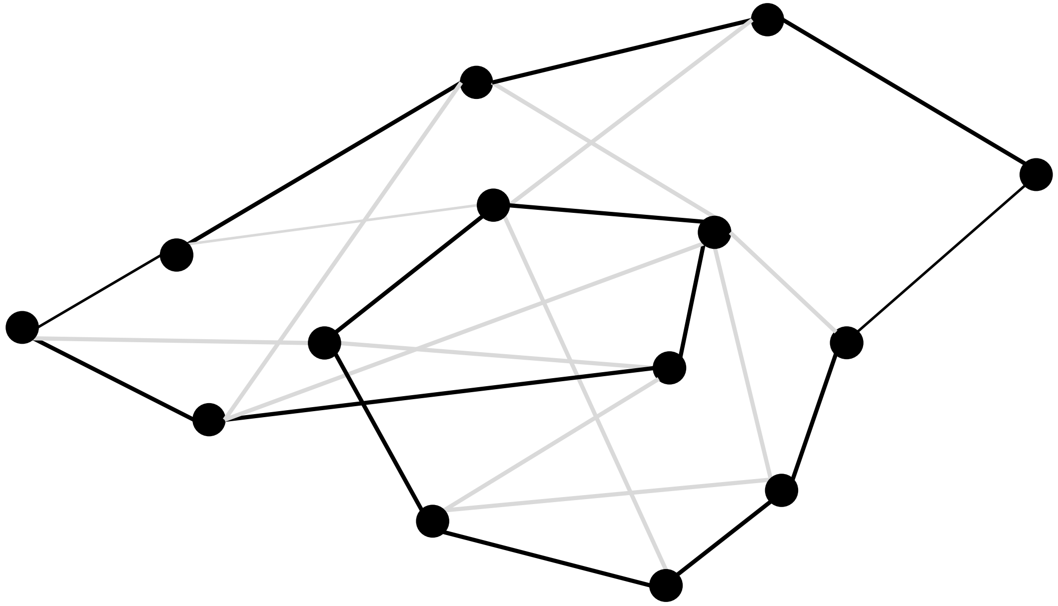
Теорема: Един свързан граф съдържа Ойлеров път тогава и само тогава, когато броят на върховете от нечетна степен е не повече от 2 (т.е. 0 или 2) и всички върхове от ненулева степен се намират в една и съща компонента

Подсказка: Ако няма връх от нечетна степен, то има Ойлеров цикъл и съответно Ойлеров път.
Ако има два върха от нечетна степен, можем да добавим един връх към графа и да го свържем с двата върха от нечетна степен. Каква е четността на степените в новополучения граф?

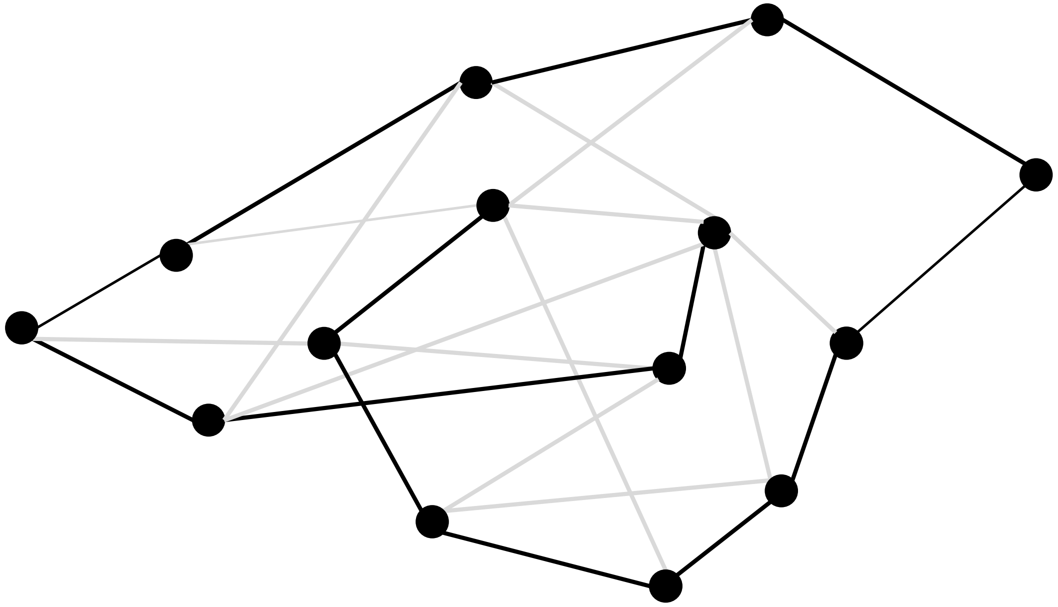
Хамилтонови пътища и цикли

Уилям Хамилтон

Хамилтонов цикъл в един граф е цикъл, който минава през всеки връх.



Хамилтонов път в един граф е път, който минава през всеки връх.



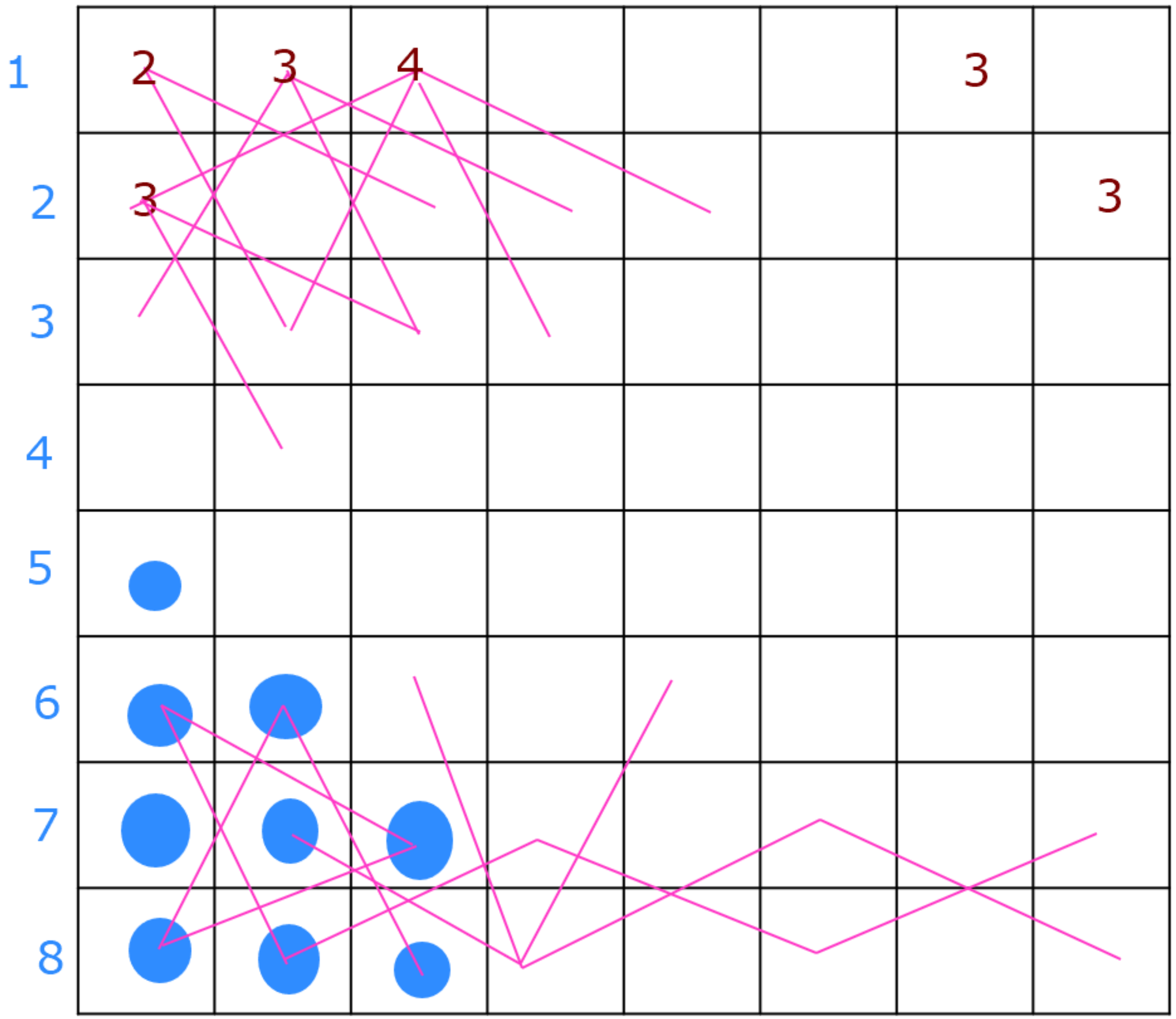
7. Може ли шахматна фигура да обиколи клетките на шахматна дъска 8x8 по такъв начин, че всеки възможен ход или неговият обратен е направен точно веднъж, ако шахматната фигура е:

а) кон

б) цар

в) топ

кон



Построяваме граф по следния начин: върховете на графа съответстват на клетките на шахматната таблица. Построяваме ребро между две клетки, ако можем да направим ход на коня между двете клетки.
Задачата пита дали можем да минем по всяко ребро точно веднъж (т.е. дали в графа има Ойлеров път)

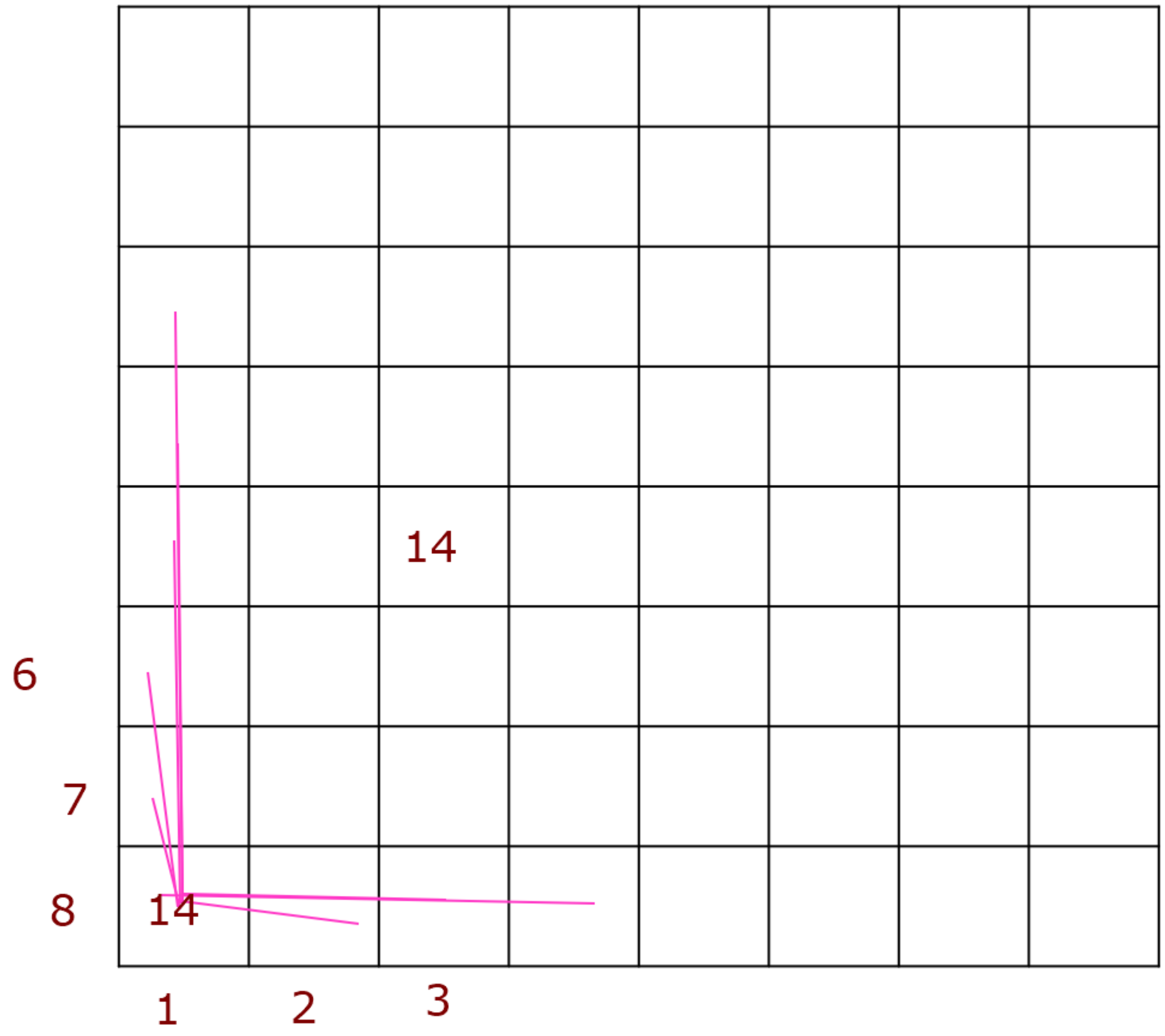
Графът е свързан. Следователно той има Ойлеров път само ако броят на върховете от нечетна степен е <=2.

На чертежа в ляво с розово са означени ребра, числата показват степените на част от върховете. Има поне 4 клетки от степен 3 (нечетно), следователно за кон няма Ойлеров път.

цар

3							3
3							3

Отново има повече от 2 върха от нечетна степен, следователно нямаме Ойлеров път.



топ

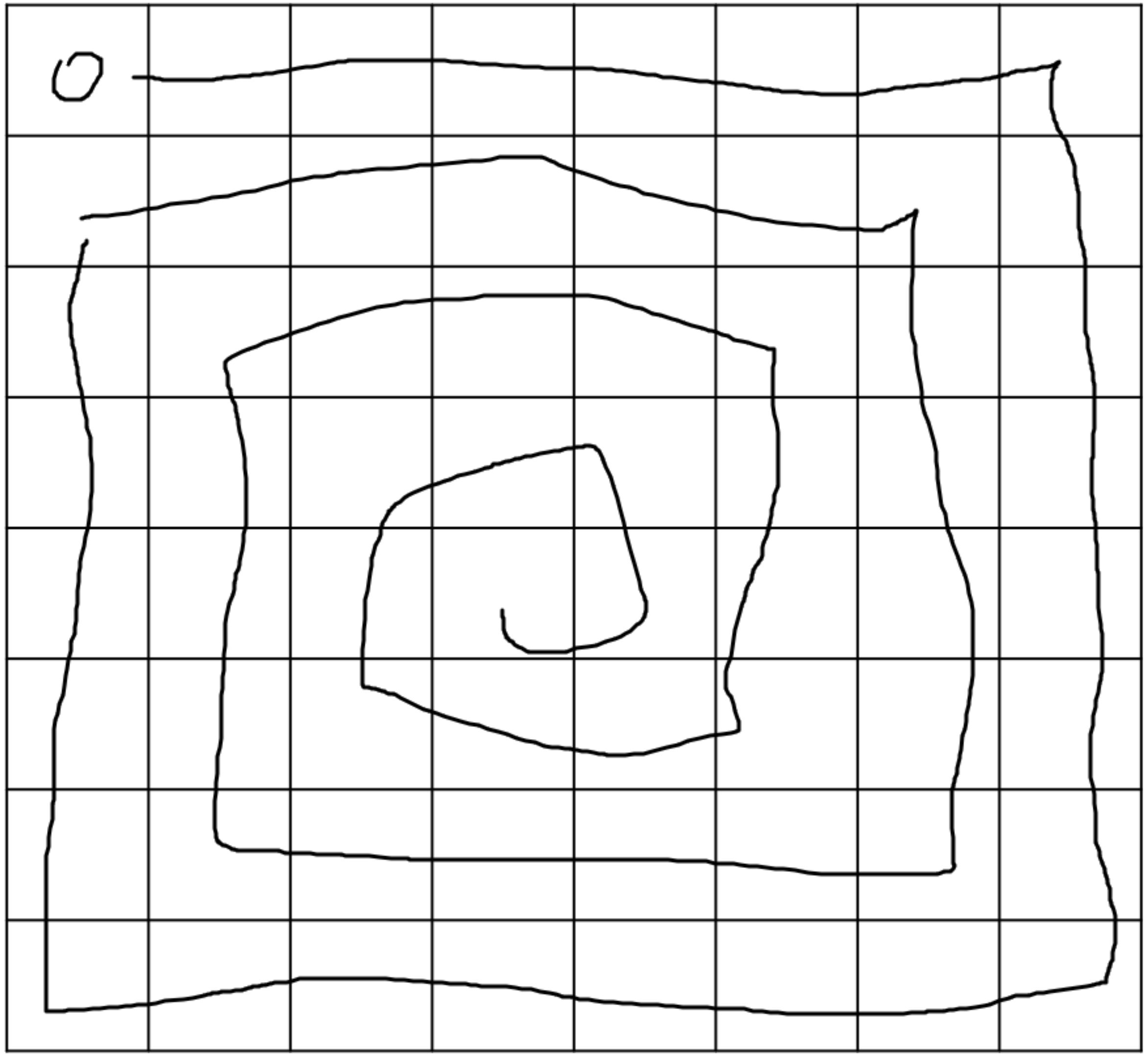
Всяка клетка е от степен 14, т.е. да (даже съществува и Ойлеров цикъл).

8. Може ли шахматна фигура да обиколи клетките на шахматна дъска 8x8 по такъв начин, че всяка клетка е посетена точно веднъж, ако шахматната фигура е:

а) топ

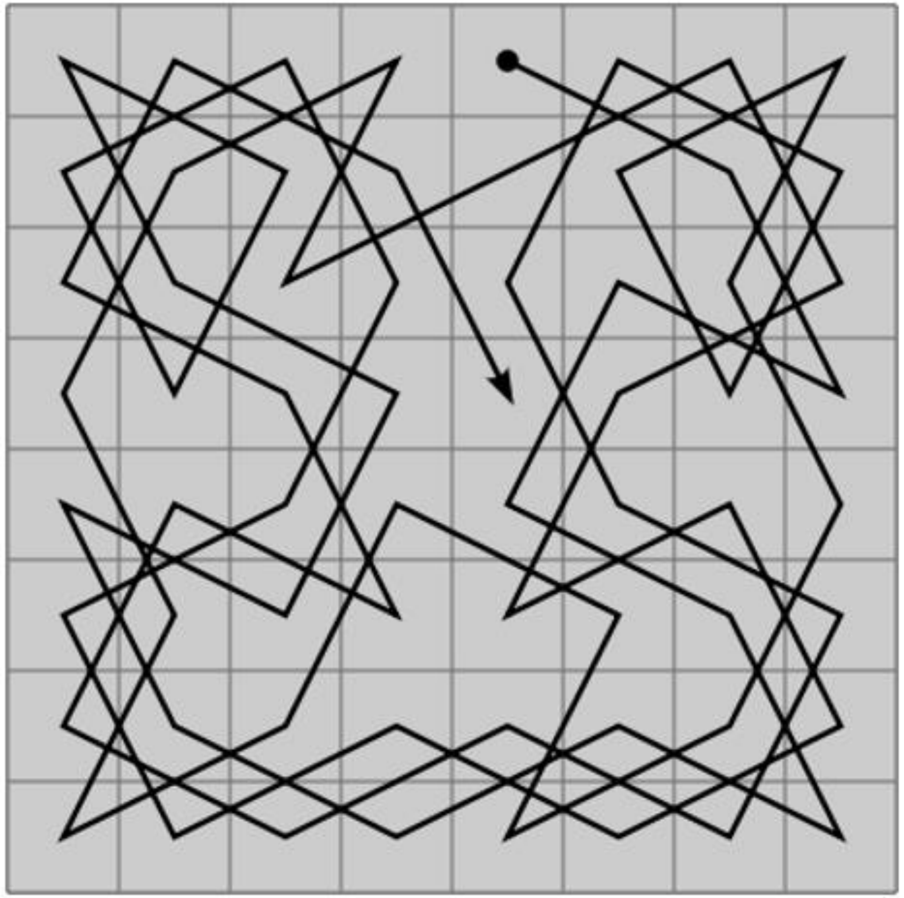
б) цар

в) кон



Построяваме графа по същия начин, както в предната задача. Този път питаме дали съществува Хамилтонов цикъл.

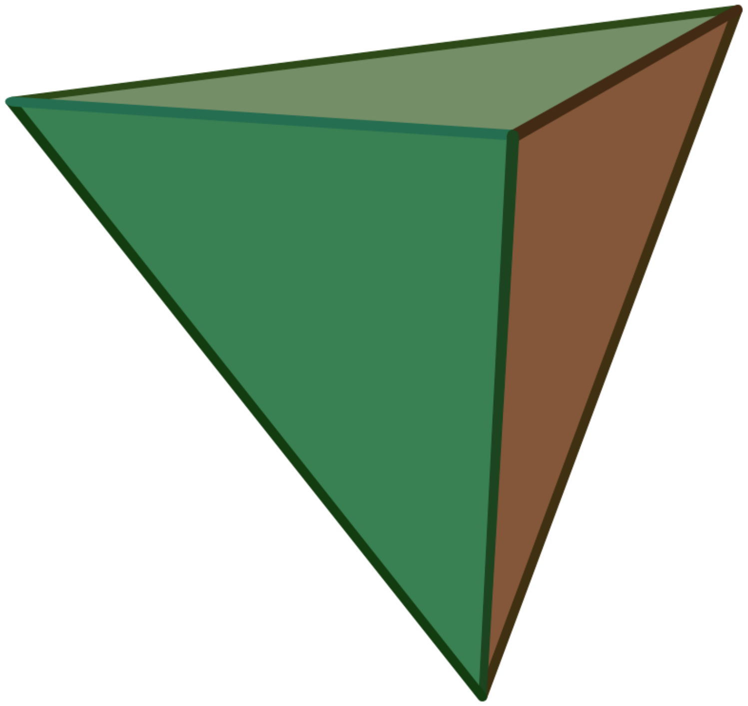
Пример за Хамилтонов цикъл чрез ходовете на топа (или царя)

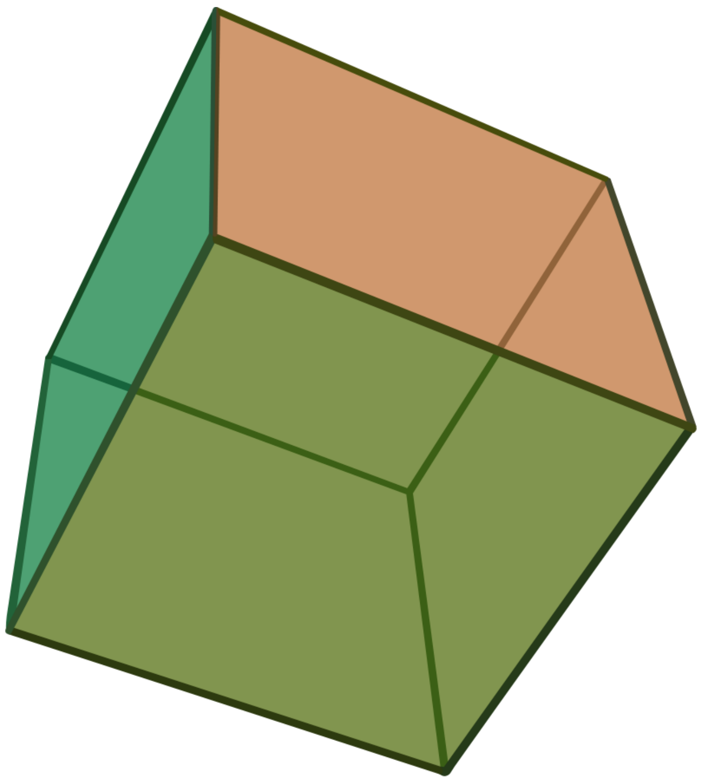


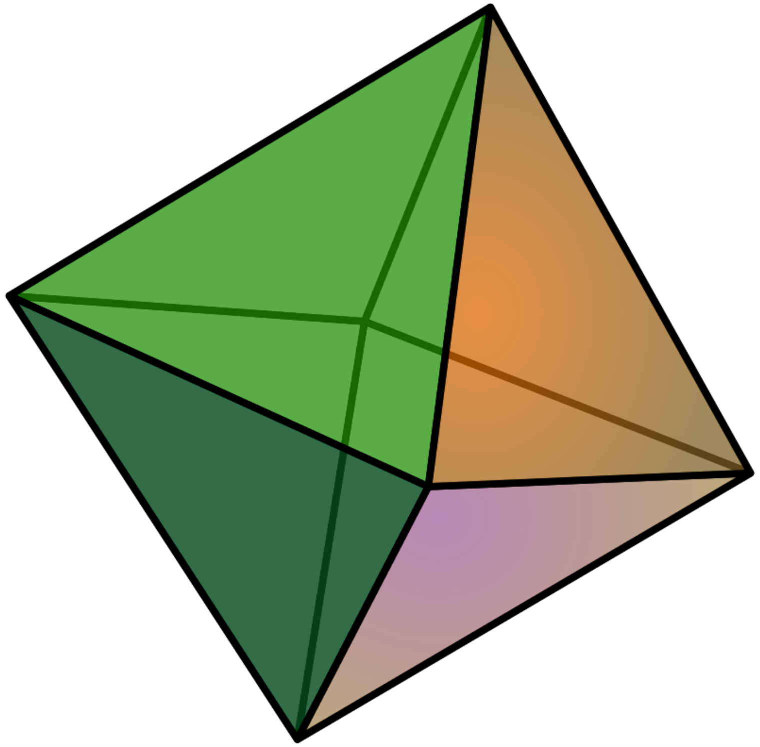
Пример за Хамилтонов цикъл чрез ходовете на коня

Планарни графи

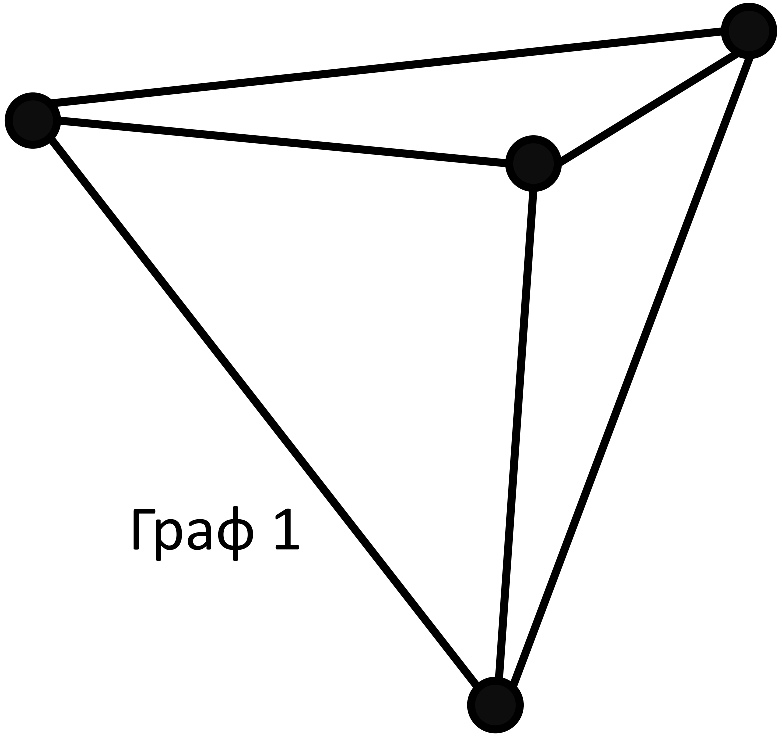
Възможно ли е следните тела да бъдат нарисувани като граф, чиито ребра не се пресичат във вътрешна точка?



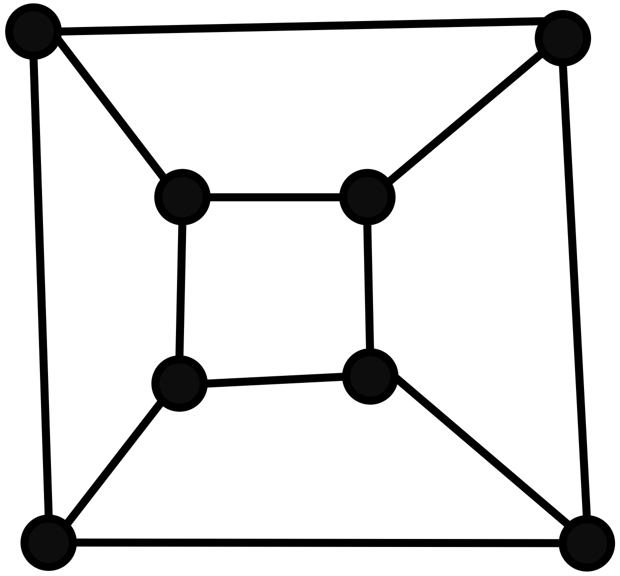




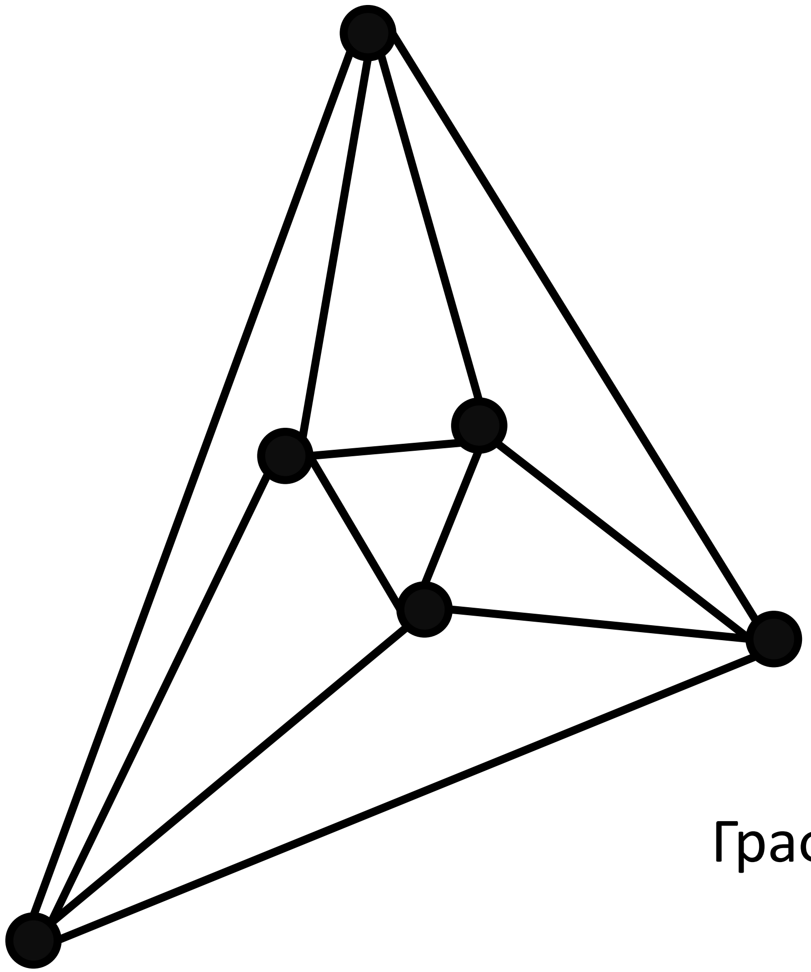
Пребройте върховете, ребрата и лицата на графите?



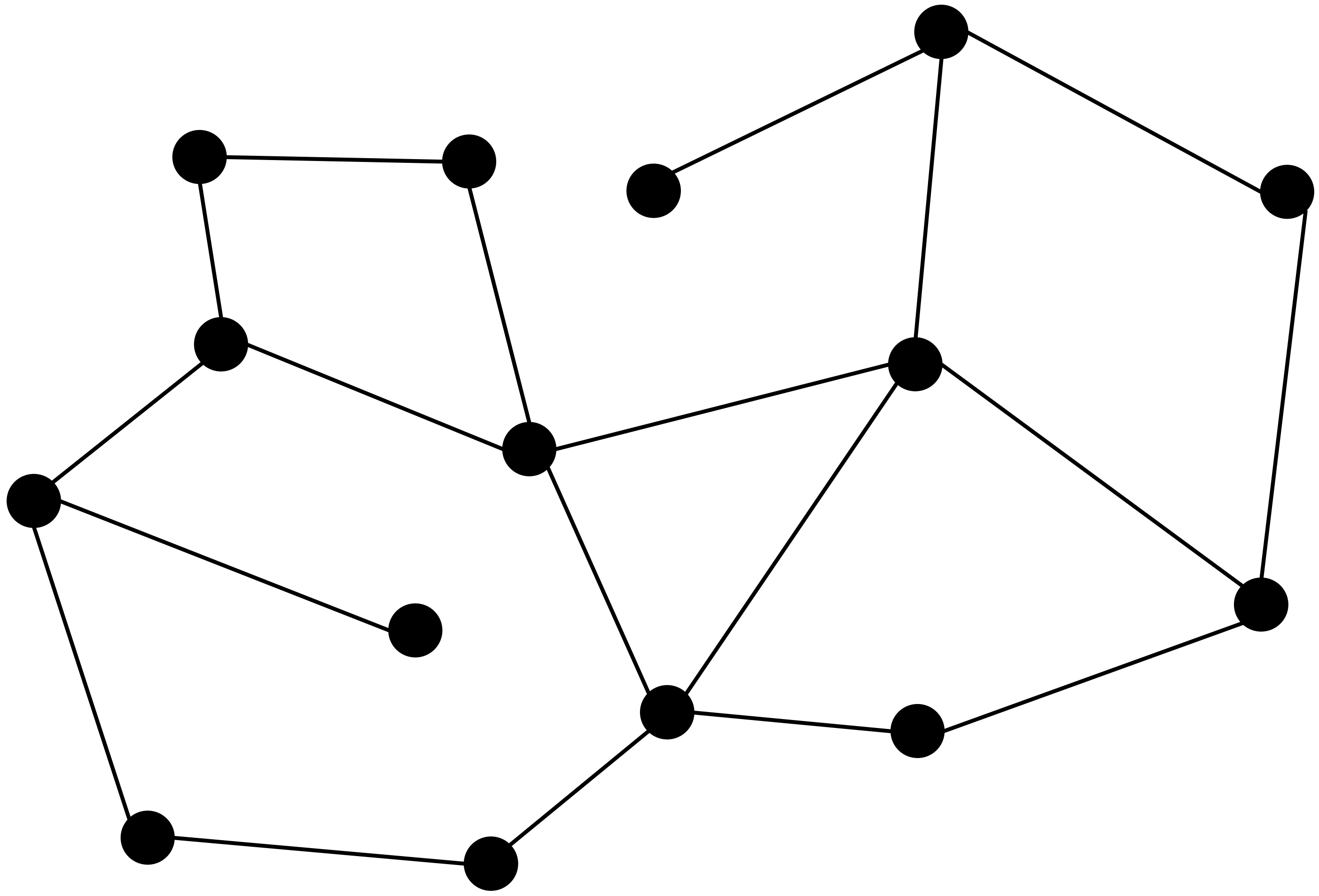
Граф 1



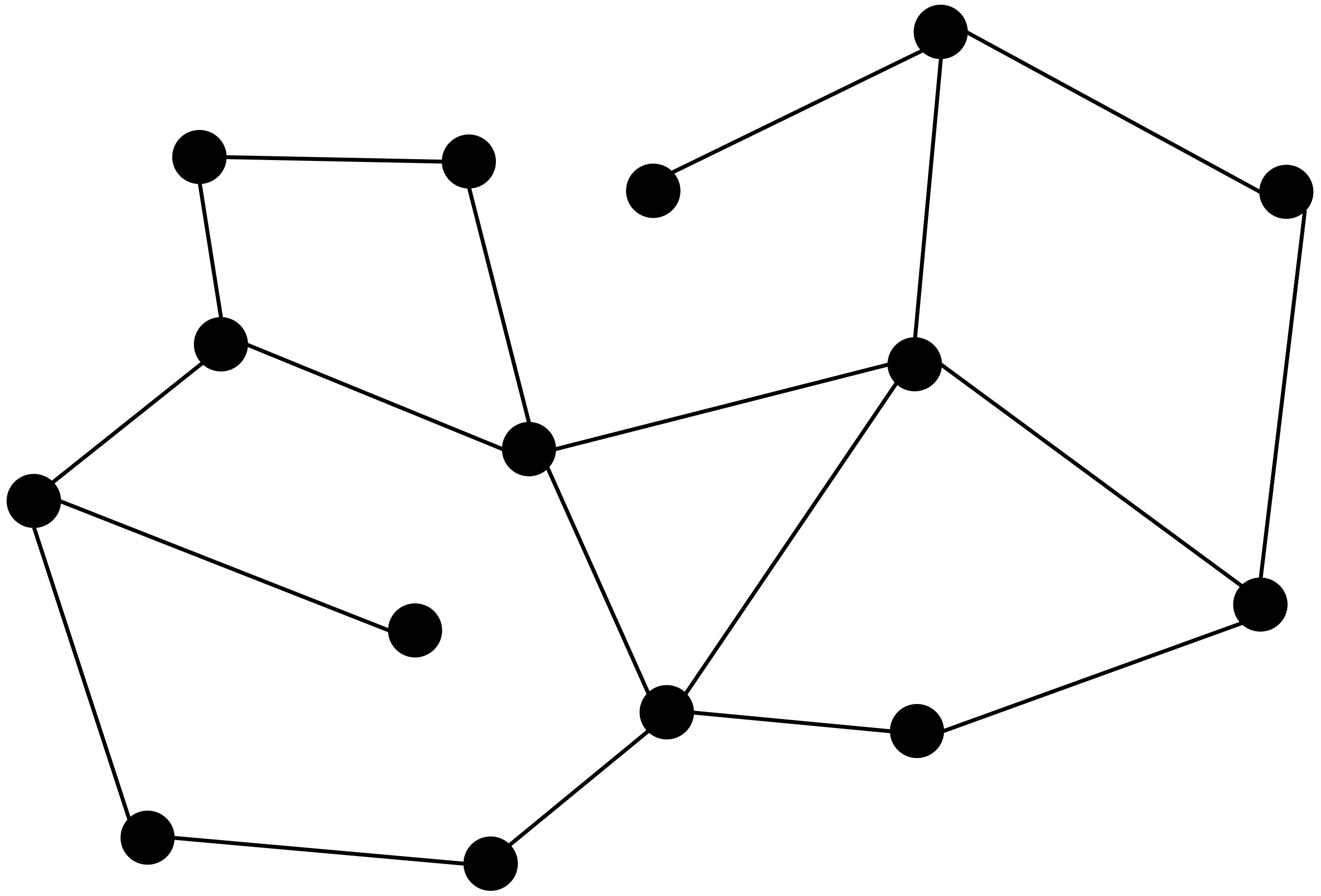
Граф 2



Граф 3



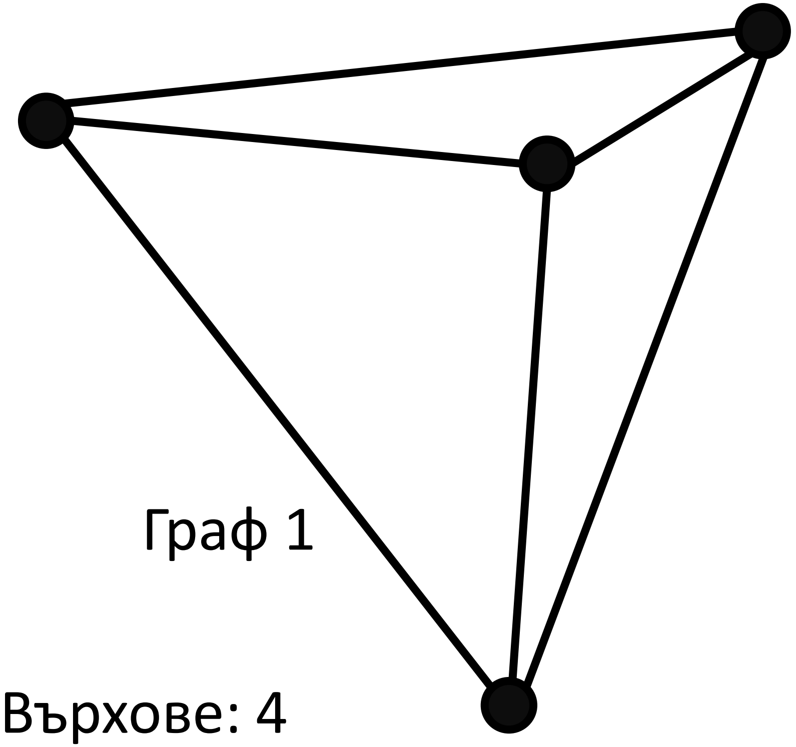
Граф, който може да бъде нарисуван в равнината по такъв начин, че никои две от ребрата му да не се пресичат във вътрешна точка, се нарича **планарен**.



Нека граф е нарисуван в равнината без пресичане на ребра във вътрешни точки. Наричаме частите, на които ребрата му разделят равнината, **лица**.

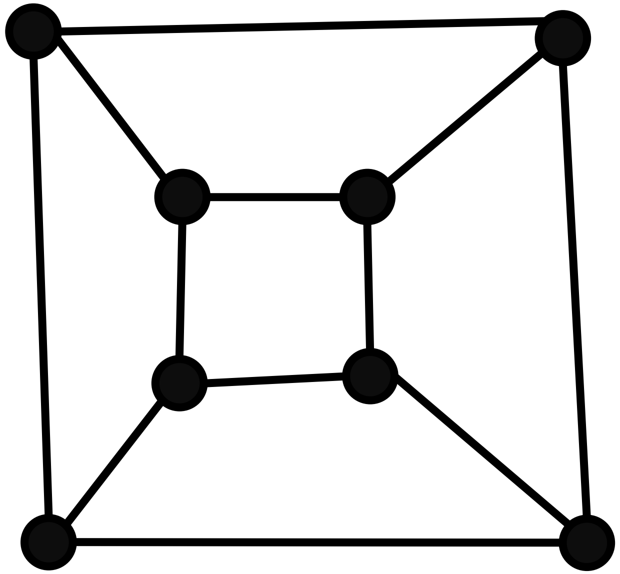
Тази рисунка на граф има 6 лица (1 от тях е „външното“ лице).

Пребройте върховете, ребрата и лицата на графите



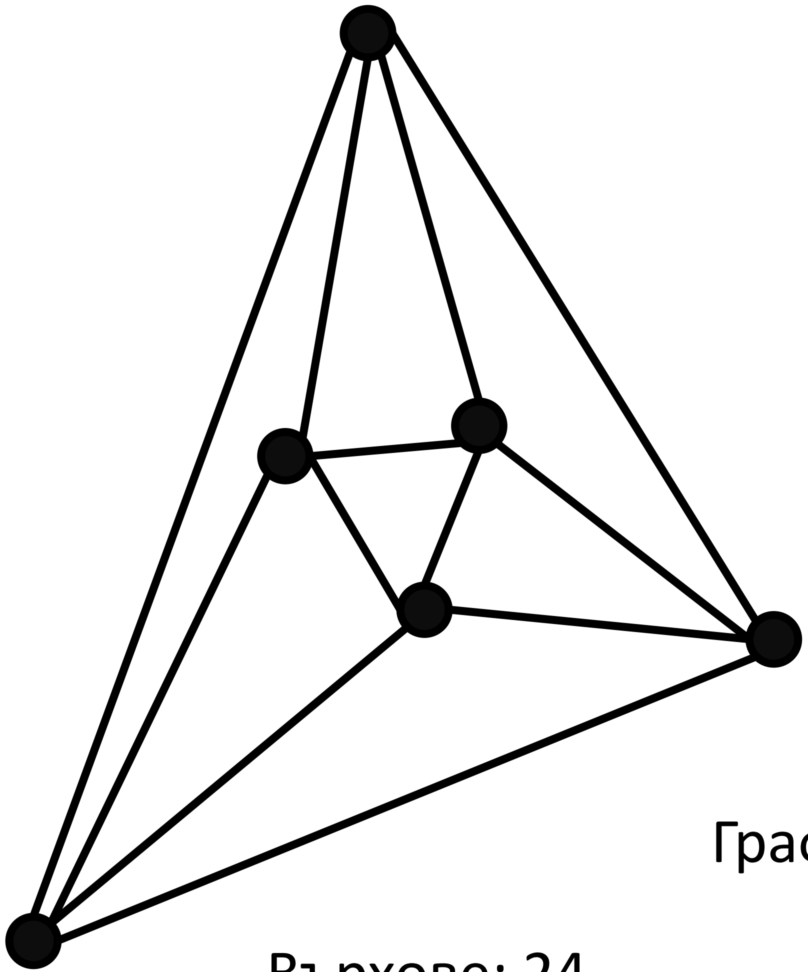
Граф 1

Върхове: 4
Ребра: 6
Лица: 4



Граф 2

Върхове: 8
Ребра: 12
Лица: 6



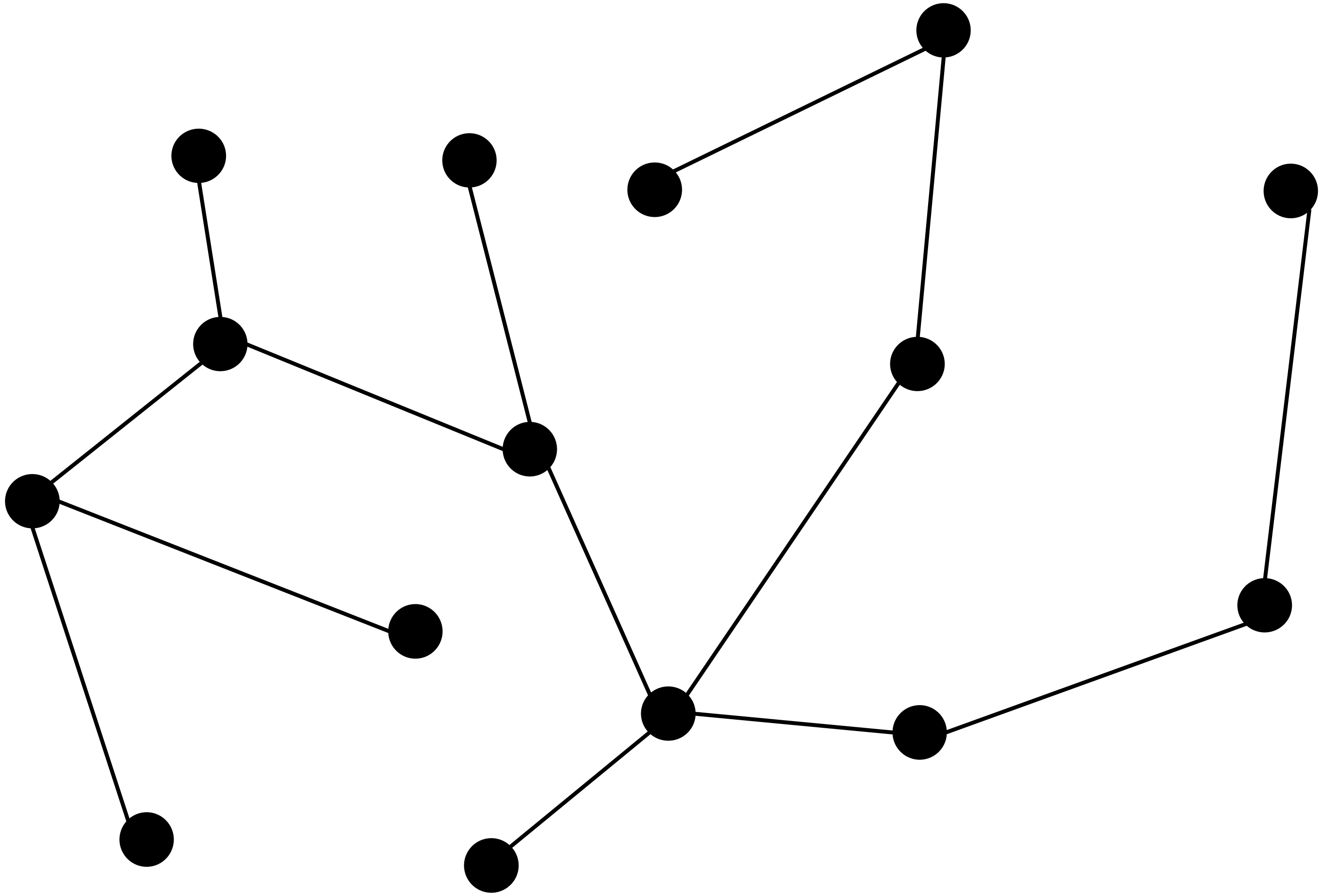
Граф 3

Върхове: 24
Ребра: 12
Лица: 8

Формула на Ойлер

В един свързан планарен граф с v върха, е ребра и f лица

$$v-e+f=2$$



брой лица

$f = 1$

брой ребра

$e = n-1$

брой върхове

$v = n$