

Теория на графите - Упражнения

1 лекция

Упражнение 1.1. Пълен граф на n върха наричаме прост граф, в който между всеки два различни върха съществува ребро. Каква е степенята на всеки от върховете? Колко ребра има в този граф?

Упражнение 1.2. В една държава има 13 града. Всеки от тях е свързан чрез двупосочен път с n други. Възможно ли е $n = 5$? А $n = 4$?

Упражнение 1.3. Даден е граф G , в който съществува разходка с начало върха A и край върха B . Докажете, че съществува път между A и B .

Упражнение 1.4. Колко компоненти може да има в един граф с 10 върха и:

- а) 2 ребра;
- б) 4 ребра;
- в) 5 ребра;
- г) 6 ребра?

2 лекция

Упражнение 2.1. Докажете следните две свойства на графите дървета:

- Всеки свързан граф с n върха и $n - 1$ ребра е дърво.
- Всяко дърво с поне 2 върха съдържа поне едно листо (върх от степен 1).

Упражнение 2.2. В една държава има n летища и от всяко от тях има двупосочни авиолинии към 5 други. От всяко летище можем да стигнем до всяко друго (може би с прекачвания). Сигурни ли сме, че това остава изпълнено при закриване на една от авиолиниите?

Упражнение 2.3. В една държава от всеки град има двупосочен път до 99 други. Какъв е минималният възможен брой градове в държавата?

Упражнение 2.4. В една държава от всеки град има двупосочен път до 99 други. В началото е възможно от всеки град да се достигне до всеки друг, но това престава да бъде изпълнено след закриване на пътя между A и B . Какъв е минималният възможен брой градове в държавата?

Упражнение 2.5. На един остров има 10 летища, някои от които са свързани с двупосочни авиолинии. Които и две летища да се затворят, от всяко от останалите можем да достигнем до всяко друго. Какъв е минималният възможен брой авиолинии?

3 лекция

Упражнение 3.1. Докажете, че в един граф има Ойлеров път тогава и само тогава, когато броят на върховете от нечетна степен е не повече от 2 и всички върхове от ненулева степен принадлежат на една и съща компонента.

Упражнение 3.2. Мравка пълзи по ръбовете на правилна триъгълна пирамида с ръб 1дм. Какво е минималното разстояние, което мравката трябва да измине, за да е обходила всеки участък от ръб поне по веднъж?

Упражнение 3.3. Мравка пълзи по ръбовете на куб с ръб 1дм. Какво е максималното разстояние, което мравката трябва да измине, ако не може да посещава никоя точка от куба повече от веднъж?

Упражнение 3.4. Петър разполага с медна тел с дължина $3n$, от която иска да изработи правилна n -ъгълна призма, в която всички ръбове са с дължина 1. Петър има право да реже телта, да я огъва и да лепи краищата на отделните части. На колко най-малко места Петър трябва да среже телта, за да успее?

Упражнение 3.5. Комплект домино съдържа 28 плочки, по една за всяка възможна двойка от числата $0, 1, \dots, 6$, включително и $(0, 0), \dots, (6, 6)$. Можем да създадем редица от плочки, като долеяме еднакви числа на две съседни плочки. Каква е максималната дължина на такава редица?

Упражнение 3.6. Комплект домино съдържа 36 плочки, по една за всяка възможна двойка от числата $0, 1, \dots, 7$, включително и $(0, 0), \dots, (7, 7)$. Можем да създадем редица от плочки, като долеяме еднакви числа на две съседни плочки. Каква е максималната дължина на такава редица?