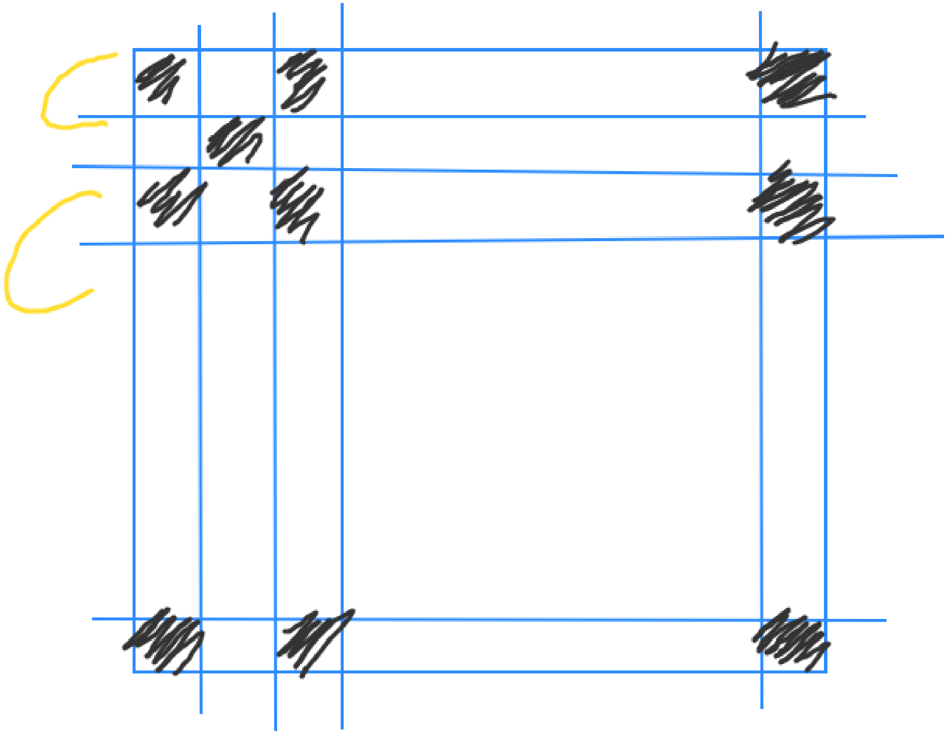
Покрития - лекция 1
Начало: 9:15

Задача за разгрявка: Нека n е нечетно число. Възможно ли е да покрием таблица nxn с домина, така че никои две от тях не се застъпват?



Оцветяваме дъската шахматно. Получаваме, че черните квадратчета са с 1 повече.

Ако $n=2k+1$

На нечетните редове има k+1 черни и k бели
На четните редове има k черни и k+1 бели

Нечетните редове са k+1 на брой, четните - k на брой.

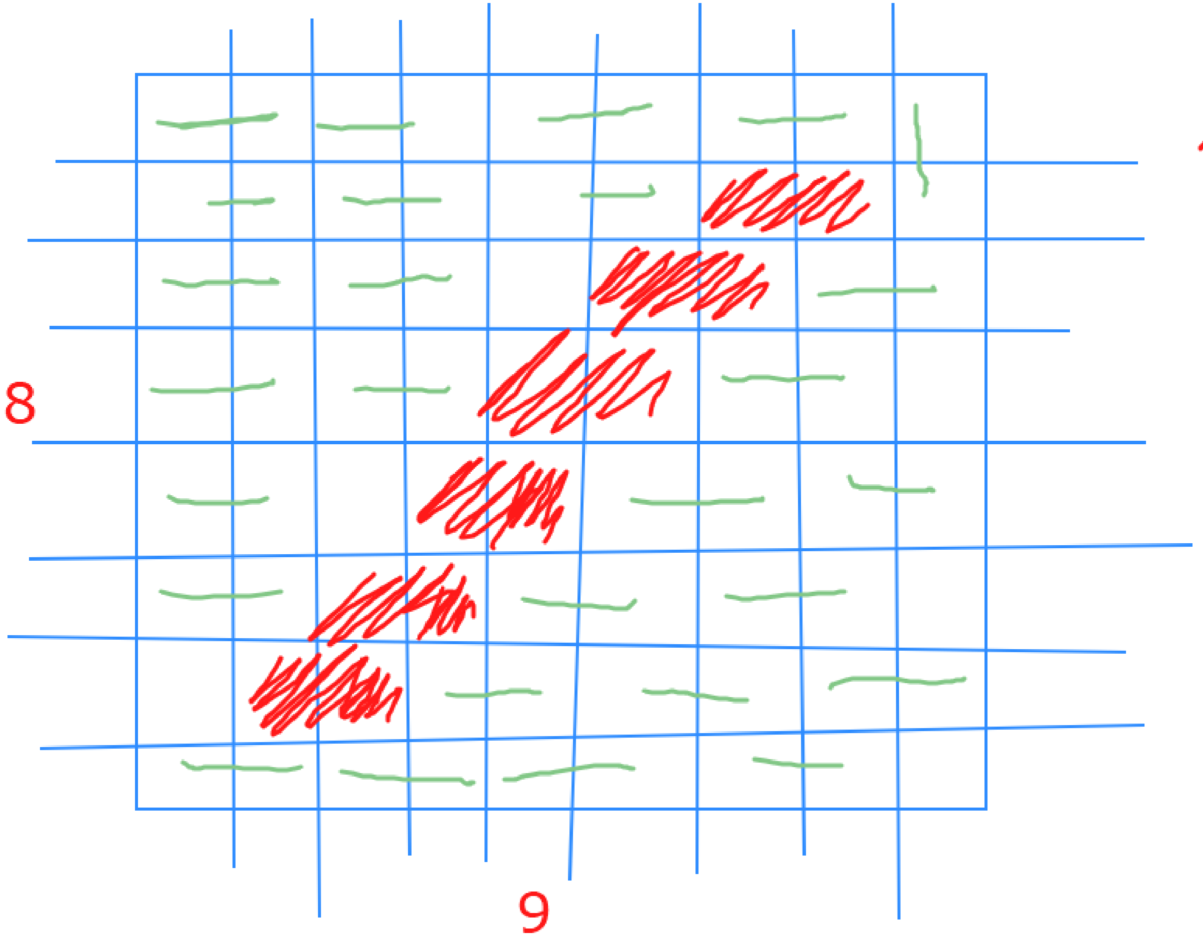
Бр бели = $(k+1)k+k(k+1)=2k(k+1)$
Бр черни = $(k+1)(k+1)+kk=(k+1)k+k+1+kk$
$=(k+1)k+k(k+1)+1=$бр бели $+1$

Всъщност броят на квадратетчата на дъската е нечетен, т.е. нямаме еднакъв брой черни и бели, така че със сигурност не можем да получим еднакъв брой бели и черни.

Всяко домино, независимо как е разположено, покрива 1 бяло и 1 черно. Следователно всички домина покриват едно и също количество бели и черни. Но на дъската има с 1 повече черни, отколкото бели. Следователно не можем да покрием дъската.

На дъската има нечетен брой квадратчета. Всяко домино покрива четен брой квадратчета, т.е. всички домина покриват четен брой квадратчета. Следователно те не покриват цялата дъска.

Задача 1: Дадена е дъска 8 × 9, в която част от квадратчетата липсват (означени са на чертежа). Колко най-много домина можем да разположим върху дъската, така че всеки две не се припокриват?

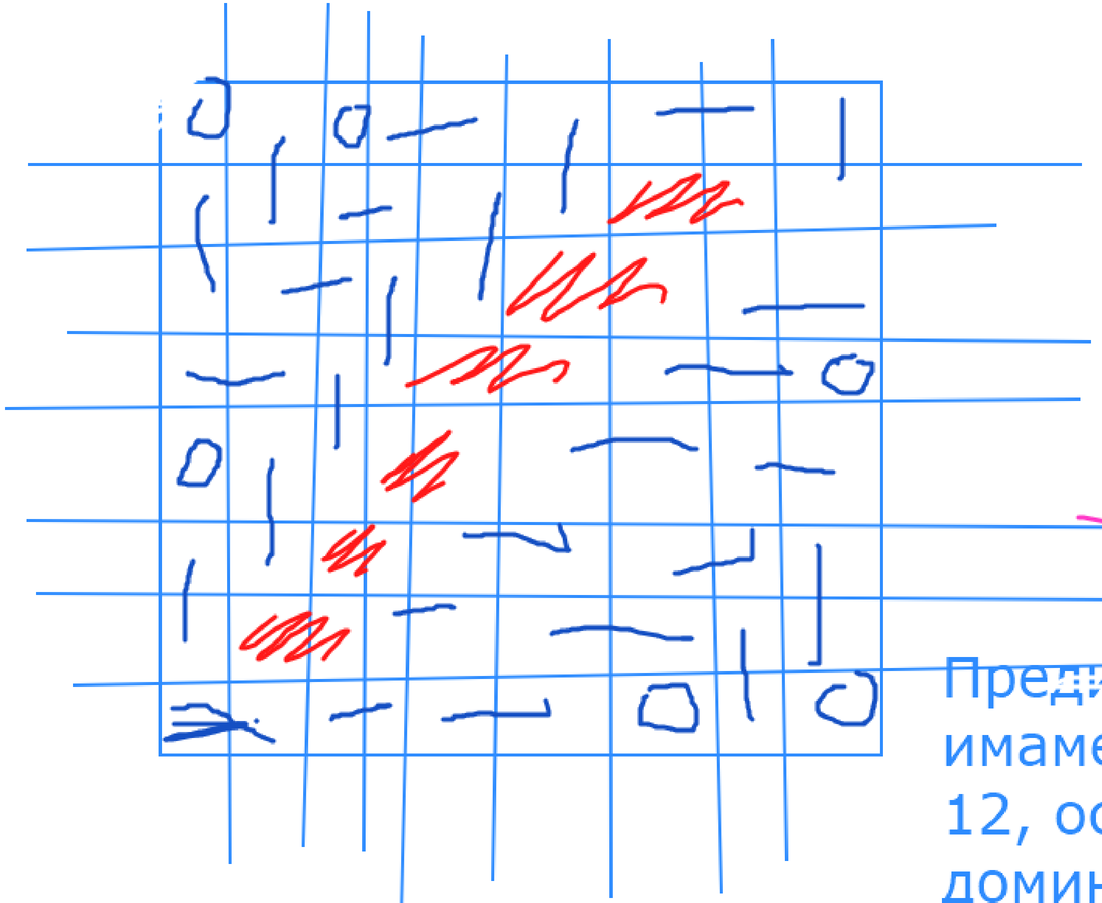



 махнато квадратче

Пример+оценка

Предположения за отговор?

Във всеки стълб можем да сложим най-много 4 (това вярно ли е?) домина, следователно очакваме не повече от 36 домина.

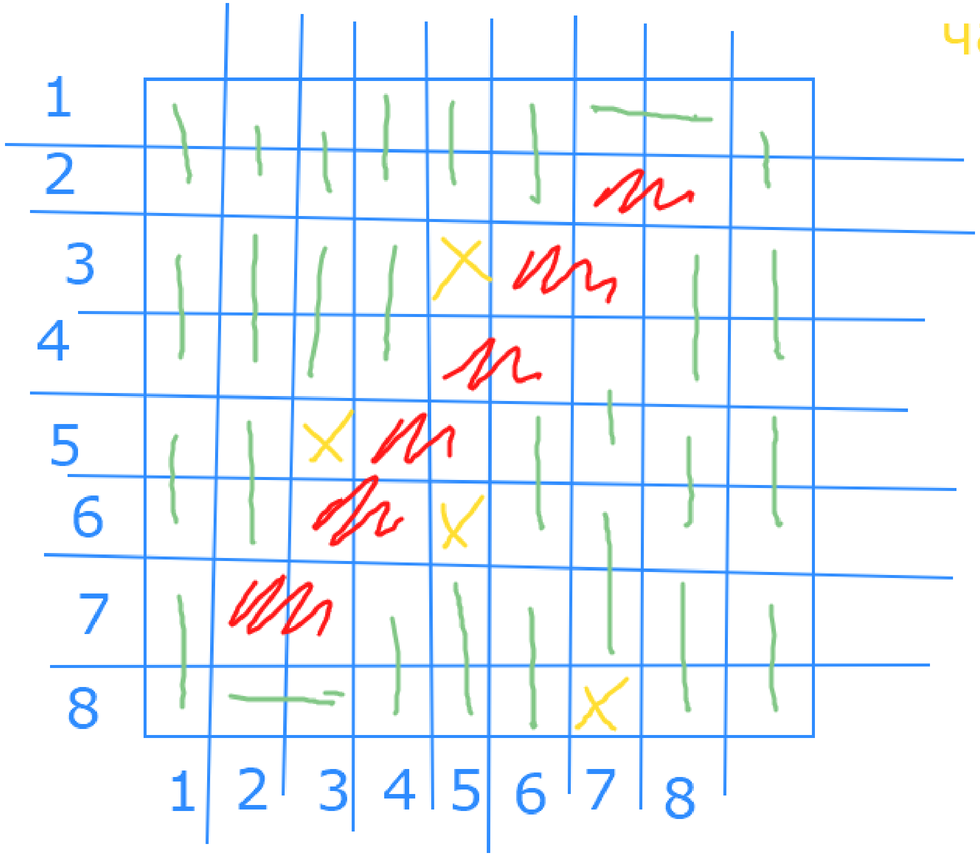


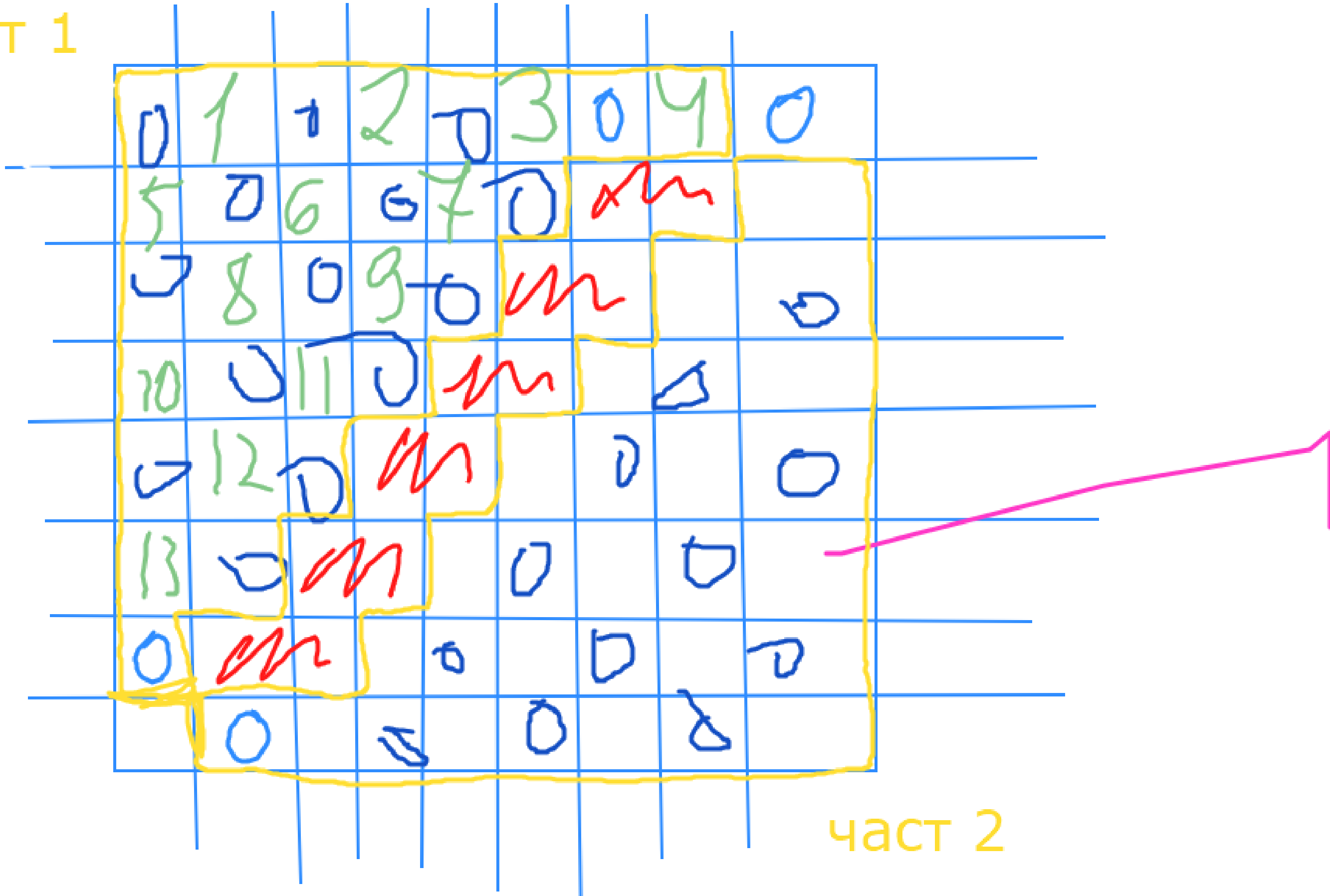
Пример за 27

Идея: оцветяваме шахматно. В махнатите квадратчета има равен брой бели и черни. Белите и черните са един и същи брой.
Предположение: можем да покрием дъската изцяло?

30?

Преди да махнем квадратчетата, имаме 72 квадратчета. Като махнем 12, остават 60 квадратчета. Едно домино покрива точно 2 квадратчета, т.е. имаме най-много 30 домина.






Пример за 28

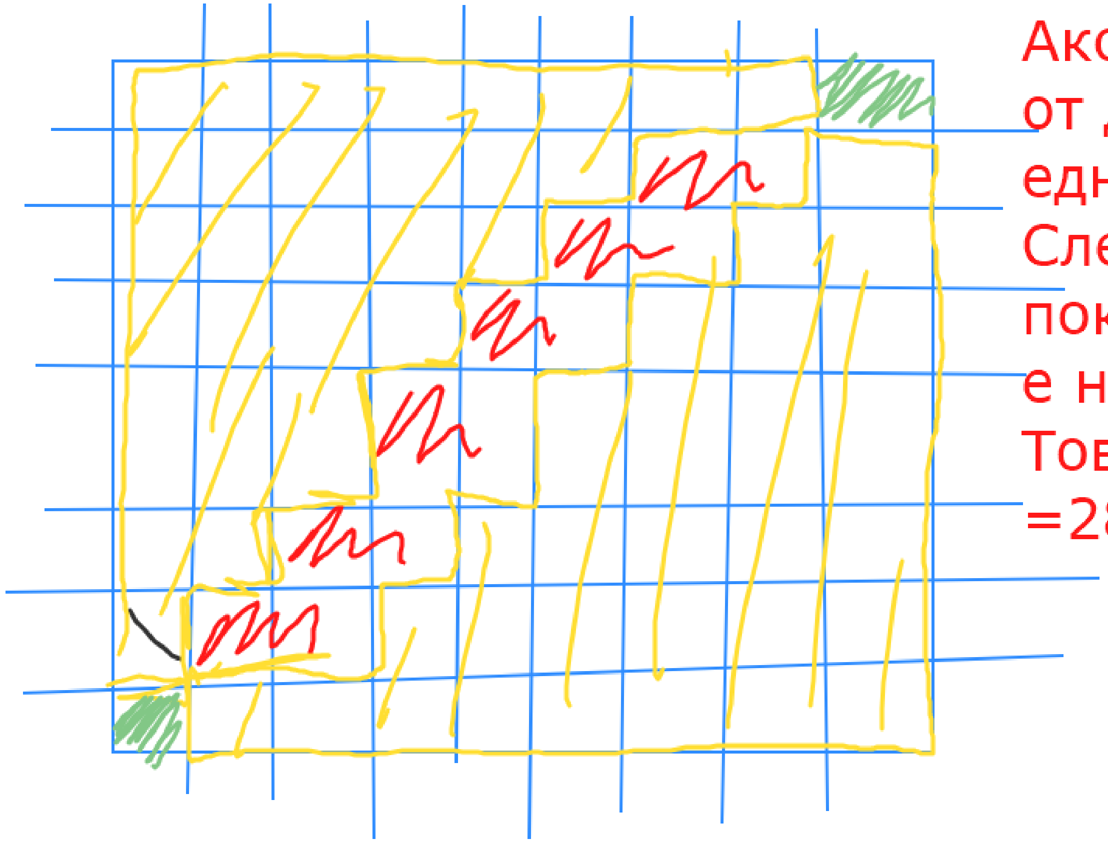
В част 1 има 16 черни ~~14~~ 13 бели

В част 2 има ~~14~~ 13 черни 16 бели

$12 \cdot 2 + 4 = 28$

Разглеждавме шахматно оцветяване

Нека x е броят домина, изцяло сържащи се в част 1. Всяко домино покрива 1 черно и 1 бяло, т.е. (понеже имаме 13 бели), сме покрили най-много 13 от тях .
Аналогично, броят домина, изцяло съдържащи се в част 2, е най-много 13.



Ако едно домино не се съдържа изцяло в една от двете части, то то трябва да покрие поне едно от двете зелени квадратчета.
Следователно броят домина, които не са покрити изцяло от която и да е от двете части, е най-много 2.
Това означава, че най-много имаме 13+13+2= =28 домина.

Отговор: 28

Задача 2: Дадена е дъска 8x8. Колко най-малко квадратчета трябва да боядисаме, така че да не можем да разположим фигура 1x3 върху дъската, така че фигурата покрива единствено неоцветени квадратчета?

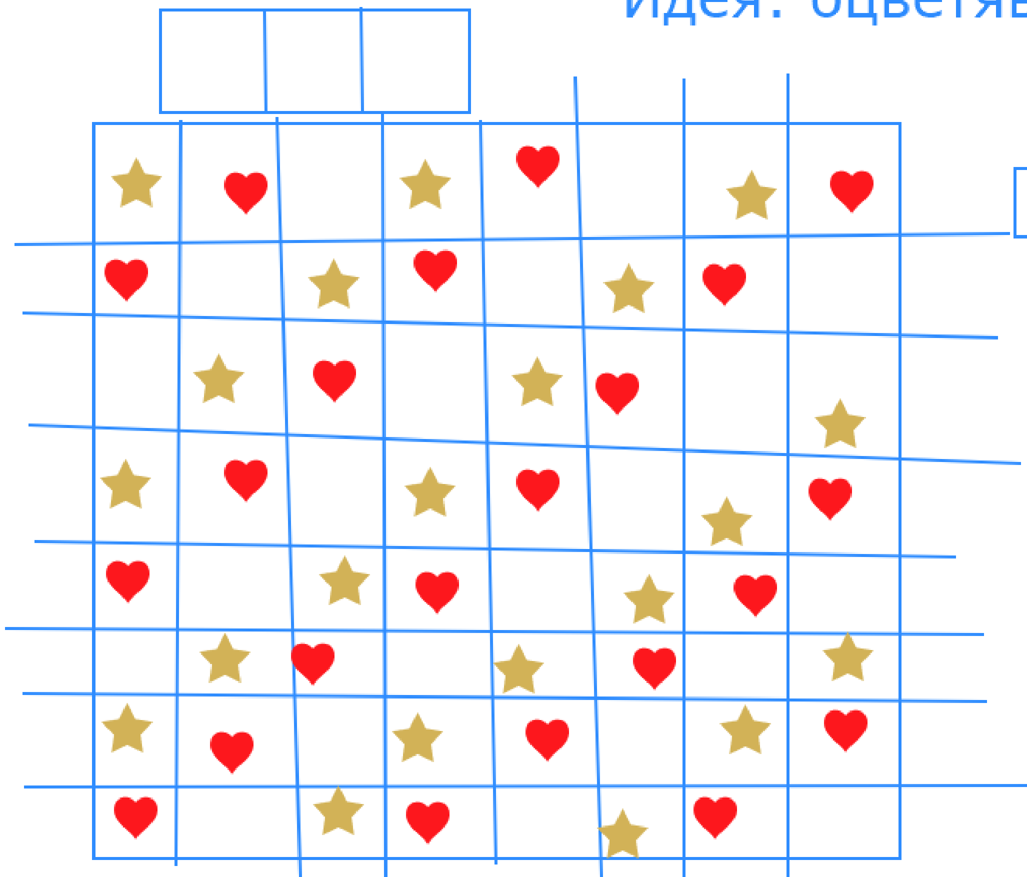
(забранено е да имаме 3 неоцветени квадратчета едно до друго или едно над друго)

Идея: оцветяваме в 3 цвята

★ 21

♥ 22

□ 21



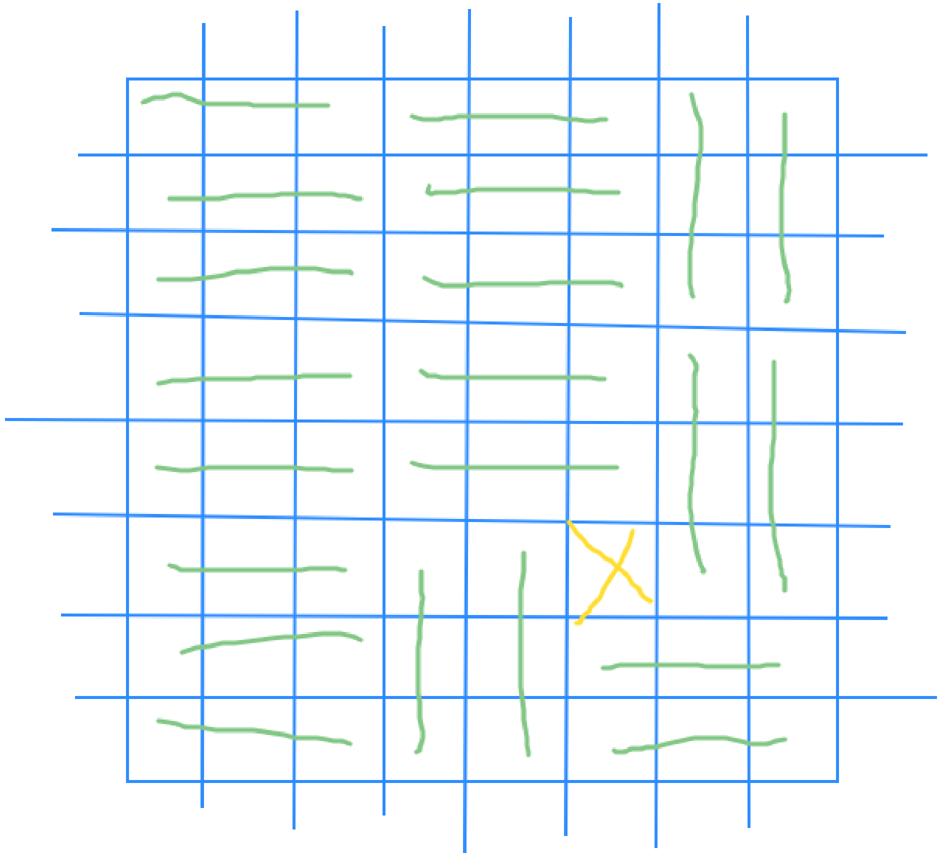
Както и да разположим фигурата 1x3, ще покрием точно едно сърце, една звезда, и едно квадратче от третия цвят.

Идея: избираме квадратчетата от един от цветовете и боядисваме всички от тях. Така която и фигура 1x3 да поставим, ще трябва едно от квадратчетата ѝ да е боядисано.

Ако боядисаме звездите, ще получим 21 боядисани квадратчета, които са такива, каквито искаме.

(това ни помогна да намерим пример)

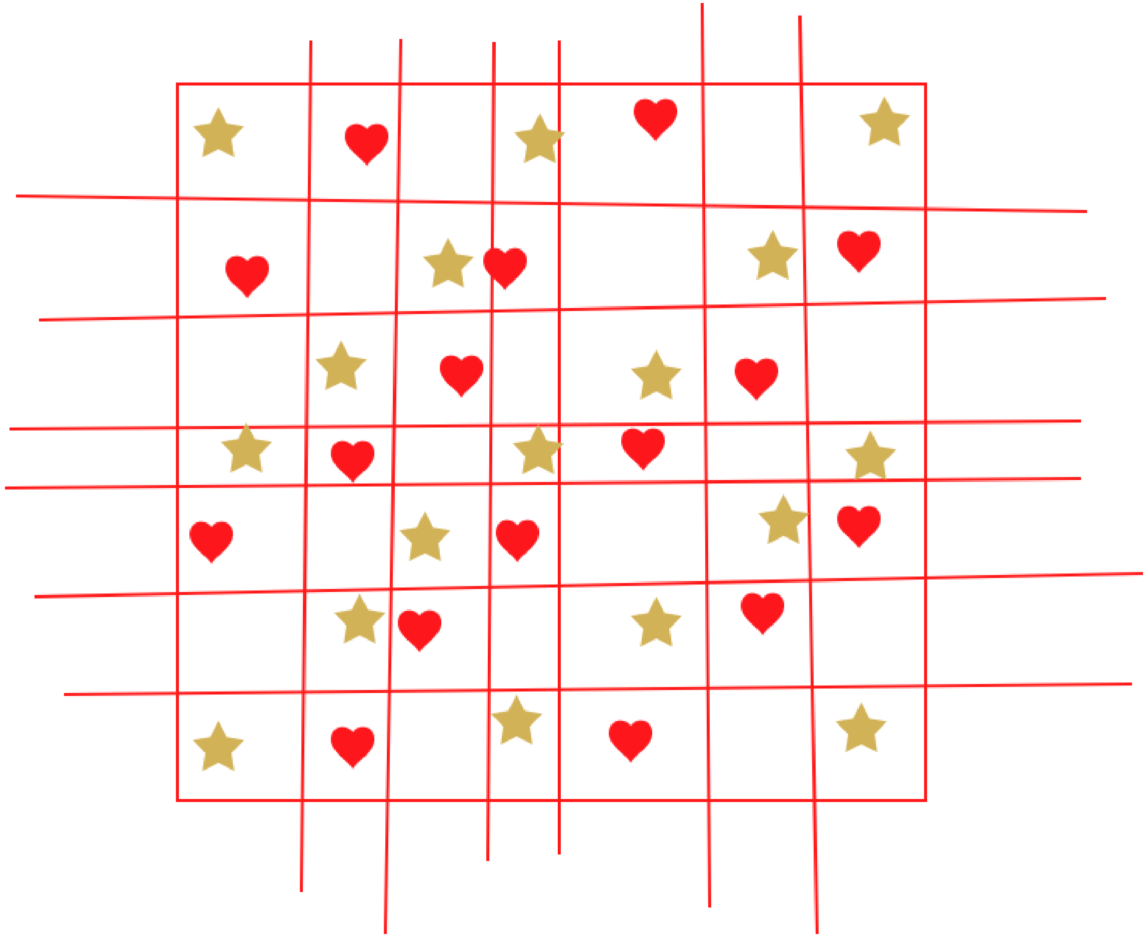
Защо не може с по-малко от 21 боядисани квадратчета?



Групираме си квадратчетата по тройки, така че всяка тройка да образува фигура 1x3. Така получаваме 21 групи от 3 квадратчета. Ако в някоя група нямаме боядисано квадратче, то можем да разположим фигурата 1x3 върху квадратчетата от тази група, противоречие. Следователно от всяка група имаме поне 1 боядисано квадратче, т.е. поне 21 квадратчета (групите не споделят квадратчета).

Отговор: 21

Задача 3: Дадена е таблица 7x7. Премахваме едно квадратче и се оказва, че можем да покрием остатъка от таблицата с фигури 1x3. Кое може да е премахнатото квадратче?



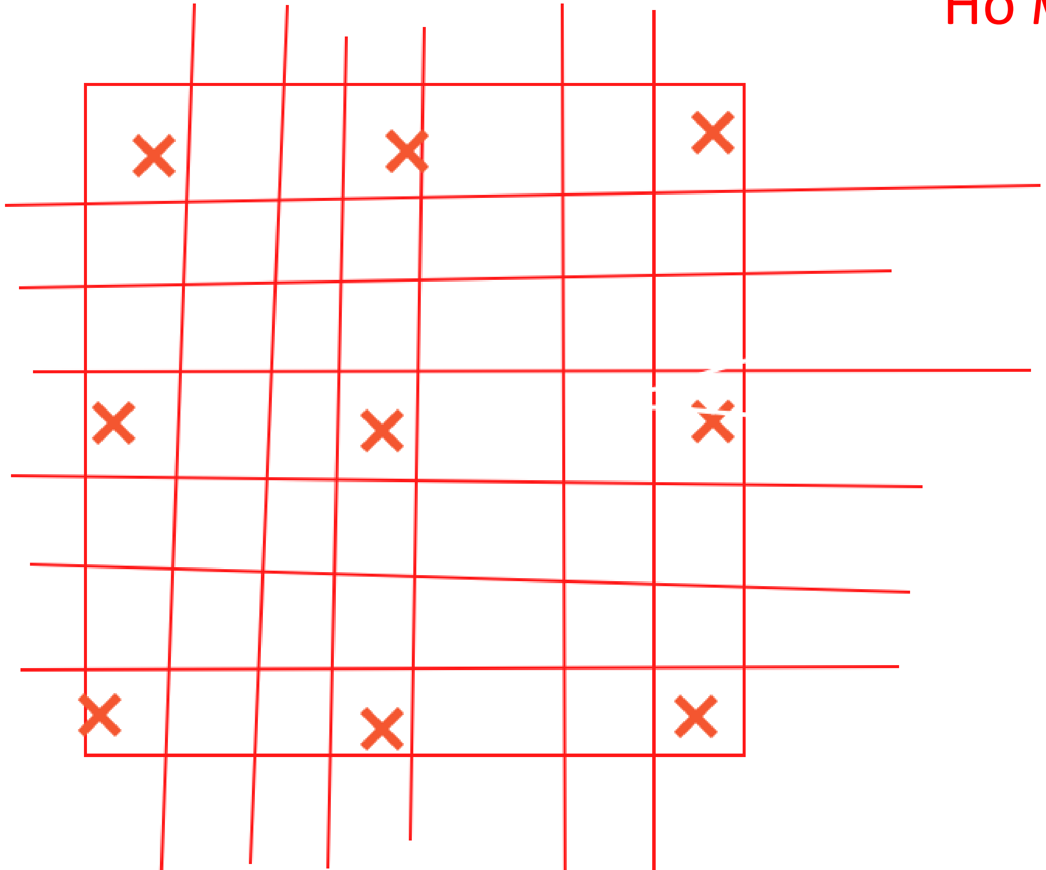
Пак оцветяваме в три цвята като в предната задача.

★ 17

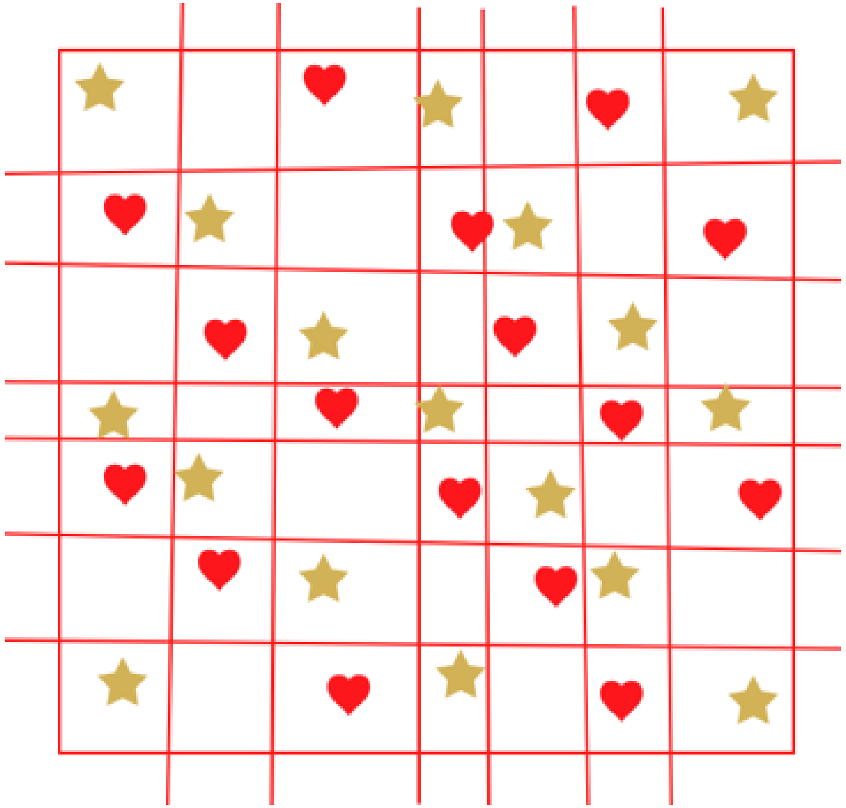
♥ 16

□ 16

Понеже всяка фигура 1x3 покрива 1 звездичка, 1 сърце и 1 бяло квадратче, то квадратчето, което сме премахнали, задължително е сред звездичките.



Но можем да вземем оцветяването по друг начин:



Ако е възможно една клетка да бъде премахната, то тя трябва да отговаря на звездичка и в двете оцветявания. Това оставя единствено клетките, обозначени с хикс на лявата картинка. За всяка от тях, можете ли да намерите как да покрием остатъка от таблицата с правоъгълници $1 \times 3$?